Technologies de l'esprit. Machines à co-habiter
LLCP - Université Paris 8 | La Générale
Paris, France

Ce que les mathématiques peuvent apporter à la critique des LLMs

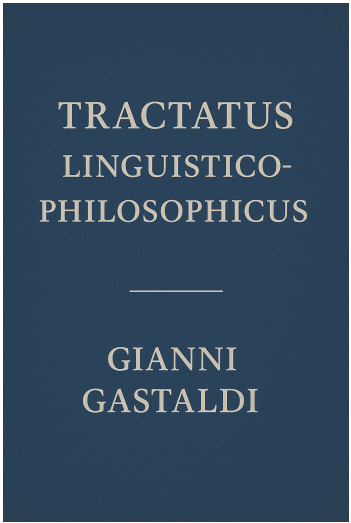
Éléments pour un formalisme critique

Juan Luis Gastaldi

www.giannigastaldi.com

ETH zürich

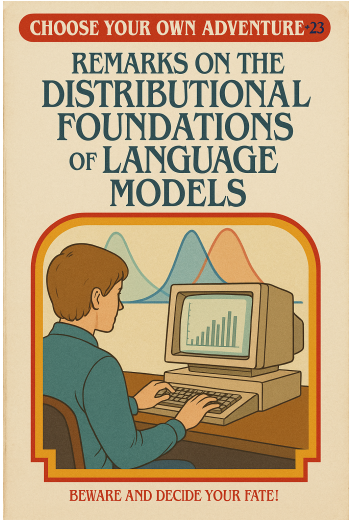
11 mai, 2026


TRACTATUS
LINGUISTICO-
PHILOSOPHICUS
GIANNI
GASTALDI

Format

TRACTATUS
LINGUISTICO-
PHILOSOPHICUS

GIANNI
GASTALDI

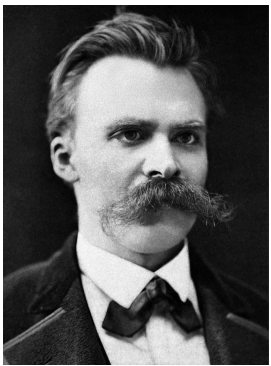


1.1 Une critique internaliste d'une "simplicité désarmante"

- Kirschenbaum (2023):
  Bender et al.'s (2021) paper "offers a disarmingly linear account of how language, communication, intention, and meaning work, one that would seem to sidestep decades of scholarship around these same issues in literary theory [...] the passage would be red meat for a graduate critical-theory seminar."

- Underwood (2023):
  "The beautiful irony of this situation [...] is that a generation of humanists trained on Foucault have now rallied around "On the Dangers of Stochastic Parrots" to oppose a theory of language that their own disciplines invented, just at the moment when computer scientists are reluctantly beginning to accept it."

1.1 La naissance de la critique contemporaine remonte à Nietzche



“Dans quelque coin reculé de l’univers ruisselant du scintillement d’innombrables systèmes solaires, il y eut un jour un astre sur lequel des animaux intelligents inventèrent le connaître. Ce fut la minute la plus orgueilleuse et la plus menteuse de l’« histoire universelle »…”

De la vérité et du mensonge au sens extra-moral
(Nietzsche, 1873)

1.1 La matrice argumentative de la critique est brisée

La connaissance dépend du langage

1.1 La matrice argumentative de la critique est brisée

La connaissance dépend du langage

↓

La relation entre le langage et le monde est essentiellement arbitraire

1.1 La matrice argumentative de la critique est brisée

La connaissance dépend du langage

↓

La relation entre le langage et le monde est essentiellement arbitraire

↓

Les régularités dans le langage/la connaissance ne sont pas naturelles,
mais culturelles/sociales/politiques

1.1 La matrice argumentative de la critique est brisée

La connaissance dépend du langage

↓

La relation entre le langage et le monde est essentiellement arbitraire

↓

Les régularités dans le langage/la connaissance ne sont pas naturelles,
mais culturelles/sociales/politiques

↓

Nous devons résister aux régularités existantes et en créer de nouvelles

1.1 La matrice argumentative de la critique est brisée

La connaissance dépend du langage
(Épistémologie)

↓

La relation entre le langage et le monde est essentiellement arbitraire

↓

Les régularités dans le langage/la connaissance ne sont pas naturelles,
mais culturelles/sociales/politiques
(Politique)

↓

Nous devons résister aux régularités existantes et en créer de nouvelles
(Esthétique)

1.1 La matrice argumentative de la critique est brisée

La connaissance dépend du langage
(Épistémologie)

[La relation entre le langage et le monde est essentiellement arbitraire?]

Les régularités dans le langage/la connaissance ne sont pas naturelles,
mais culturelles/sociales/politiques
(Politique)

↓

Nous devons résister aux régularités existantes et en créer de nouvelles
(Esthétique)

1.1

1.21

1.22

1.23

1.2

1.2 *Les limites de la critique dans la production du savoir tiennent à la place des savoirs formels

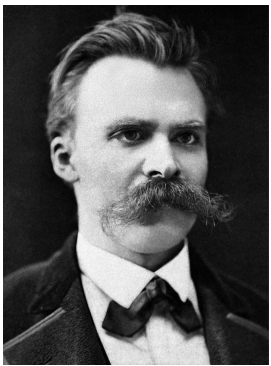
1.21 Les savoirs formels sont une construction récente

1.22 Ils ont été mobilisés pour fonder des epistémologies dogmatiques

1.23 La tradition critique a fait du formalisme une cible

1.31

Fondations mouvantes



"...tout peuple possède donc un ciel conceptuel semblable [mathématiquement divisé], et qui le surplombe; [...] On peut bien sur ce point admirer l'homme pour le puissant génie de l'architecture qu'il est: il réussit à ériger une cathédrale conceptuelle infiniment compliquée sur des fondations mouvantes, en quelque sorte sur de l'eau courante. À vrai dire, pour trouver un point d'appui sur de telles fondations, il ne peut s'agir que d'une construction semblable à une toile d'araignée, si fine qu'elle peut suivre le courant du flot qui l'emporte, si résistante qu'elle ne peut être dispersée au gré du vent.

(Nietzsche, 1873)

1.32

1.3

1.3 *Une nouvelle alliance entre pensée critique et formalisme est nécessaire

1.31 Le formalisme n'est pas un naturalisme

1.32 Un formalisme critique est possible

1

1 *Nous avons besoin d'un *formalisme critique*

1.1 *La critique de l'IA est à court de carburant

1.2 *Les limites de la critique dans la production du savoir tiennent à la place des savoirs formels

1.3 *Une nouvelle alliance entre pensée critique et formalisme est nécessaire

2.11

2.12

$P := \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$

Empirical evaluation

$$P := \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$$

0: $\lambda f.\lambda x.x$

1: $\lambda f.\lambda x.fx$

2: $\lambda f.\lambda x.f(fx)$

3: $\lambda f.\lambda x.f(f(fx))$

4: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(fx)))$

5: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

$\ldots$

n: $\lambda f.\lambda x.\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ times}}x)\ldots)$

$P := \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$

0: $\lambda f.\lambda x.x$

1: $\lambda f.\lambda x.fx$

2: $\lambda f.\lambda x.f(fx)$

3: $\lambda f.\lambda x.f(f(fx))$

4: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(fx)))$

5: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

$\ldots$

n: $\lambda f.\lambda x.\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ times}}x)\ldots)$

$\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)(\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda f.\lambda x.f(f(fx)))$

Empirical evaluation

$P := \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$

0: $\lambda f.\lambda x.x$

1: $\lambda f.\lambda x.fx$

2: $\lambda f.\lambda x.f(fx)$

3: $\lambda f.\lambda x.f(f(fx))$

4: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(fx)))$

5: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

$\ldots$

n: $\lambda f.\lambda x.\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ times}}x)\ldots)$

$\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)(\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda f.\lambda x.f(f(fx)))$

$\vdots$

$\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

Empirical evaluation

$P := \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$
$P' := \lambda r.\lambda s.\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

0: $\lambda f.\lambda x.x$
1: $\lambda f.\lambda x.fx$
2: $\lambda f.\lambda x.f(fx)$
3: $\lambda f.\lambda x.f(f(fx))$
4: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(fx)))$
5: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$
...
n: $\lambda f.\lambda x.\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ times}}x)\ldots)$

$\lambda r.\lambda s.\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))(\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda f.\lambda x.f(f(fx)))$

$\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

$P := \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$

0: $\lambda f.\lambda x.x$
1: $\lambda f.\lambda x.fx$
2: $\lambda f.\lambda x.f(fx)$
3: $\lambda f.\lambda x.f(f(fx))$
4: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(fx)))$
5: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$
...
n: $\lambda f.\lambda x.\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ times}}x)\ldots)$

$\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)(\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda f.\lambda x.f(f(fx)))$

$\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

$P := \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$

0: $\lambda f.\lambda x.x$

1: $\lambda f.\lambda x.fx$

2: $\lambda f.\lambda x.f(fx)$

3: $\lambda f.\lambda x.f(f(fx))$

4: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(fx)))$

5: $\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

$\ldots$

n: $\lambda f.\lambda x.\underbrace{f(\ldots(f}_{n \text{ times}}x)\ldots)$

$\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)(\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda f.\lambda x.f(f(fx)))$

$\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)(\lambda g.\lambda y.g(gy))(\lambda h.\lambda z.h(h(hz)))$

$\lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda g.\lambda y.g(gy))f(nfx)(\lambda h.\lambda z.h(h(hz)))$

$\lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda g.\lambda y.g(gy))f(nfx)(\lambda h.\lambda z.h(h(hz)))$

$\lambda f.\lambda x.(\lambda g.\lambda y.g(gy))f((\lambda h.\lambda z.h(h(hz)))fx)$

$\lambda f.\lambda x.(\lambda y.f(fy))((\lambda h.\lambda z.h(h(hz)))fx)$

$\lambda f.\lambda x.(\lambda y.f(fy))((\lambda z.f(f(fz)))x)$

$\lambda f.\lambda x.(\lambda y.f(fy))(f(f(fx)))$

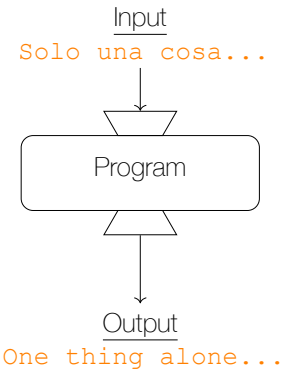
$\lambda f.\lambda x.f(f(f(f(fx))))$

$P := \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.mf(nfx)$

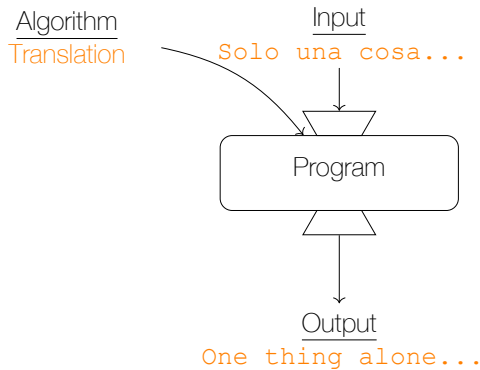
$P'' :=$ λRófÄÒêÑ5È|Àxñ=∞ù ÿmWf286ëy’SÒú>v&ìÂ ¬2 óÉ7öç∞{ã>2flB°µG#À9ÇU ∞btYBô¥ Ù ë‰3;5 å[l–èuô¨Ü ˚ 7–Ù.λ:ˆ4mÓØ¥´è—+ÌsÖ,$+gï„B™÷o–#ïŸê Ûv –gÓÿ/ëiijO‡Œfi • J1«€ø˛Ï hãêt‡æY$ˆ6 FïW»RÙKg¢¨.λ‡d¯… D2÷˛ò ˚ xêÈy. Ó”¢b Bé£NÈ1Ê‡/Û9Ñµ–/JYÇõË9ÿÀÈ.λÁÍ Àˆöç,»fq∞±îˇB5Ì>Oˆg™“6Ωe“æëC/ã… Ö · fÓ Å]ÑåyÊN°Ê ›¨.λÆà€fUòfEÙ·Í m#„˛4\r√¬÷Îpò»y*vtÄJÃF1ûÁóz«ñM”DjŒ BËèÍT _ Êa‰ÁÇΩ @\Øˆ˜]Î›h‡.:ˆ4mÓØ¥´è—+ÌsÖ,$+gï„B™÷o–#ïŸê Ûv–gÓÿ /ëiijO‡Œfi • J1«€ø˛Ï hãêt‡æY$ˆ6 FïW»RÙKg¢¨ÁÍ Àˆöç,»fq∞±îˇB5Ì>Oˆg™“6 Ωe“æëC/ã… Ö · fÓ Å]ÑåyÊN°Ê ›¨(‡d¯… D2÷˛ò ˚ xêÈy. Ó”¢bBé£NÈ1Ê‡/Û9Ñµ–/ JYÇõË9ÿÀÈÁÍ Àˆöç,»fq∞±îˇB5Ì>Oˆg™“6Ωe“æëC/ã… Ö · fÓ Å]ÑåyÊN°Ê ›¨Æ à€fUòfEÙ·Í m#„˛4\r√¬÷Îpò»y*vtÄJÃF1ûÁóz«ñM”DjŒBËèÍT _ Êa‰ÁÇΩ @\ Øˆ˜]Î›h‡)(ËÍÛeí4WµÍ }w„$Ω“K5èÃ¶%3[m ’ˇBÃfifÒ; óJçCËïõŸØcB,ñ$Åå}ÓÅØ3¡ ˇ?ö¯oŒ@ fl8ˇR CÆoˇ* &<Ÿ ¬o12À‰ àÓÜ#ï ″,ú¨ «ô˛„∞Îää“øÃd|ˆÑ’Ê yØ;ˆW ›″wò[}\»ÖÈúw’6<ùˇ=ãÕ ¯Ì‘Dz?2±|é‘ 3Â/rxµ∞µ$ÀëÂ*lf˜îû’+ÍVìy[a]Gæßägô/,uÑ)

2.13

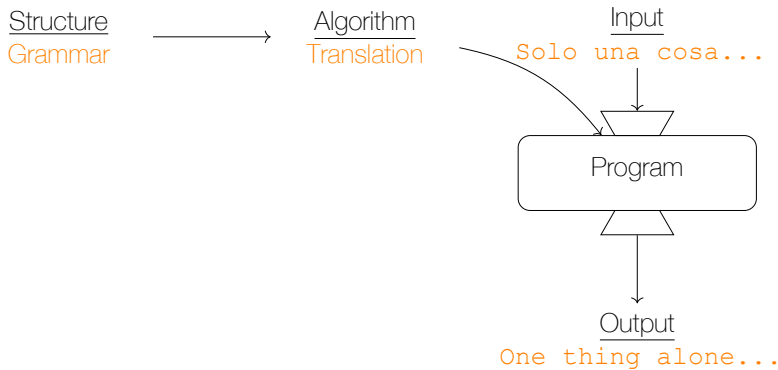
La structure implicite des données



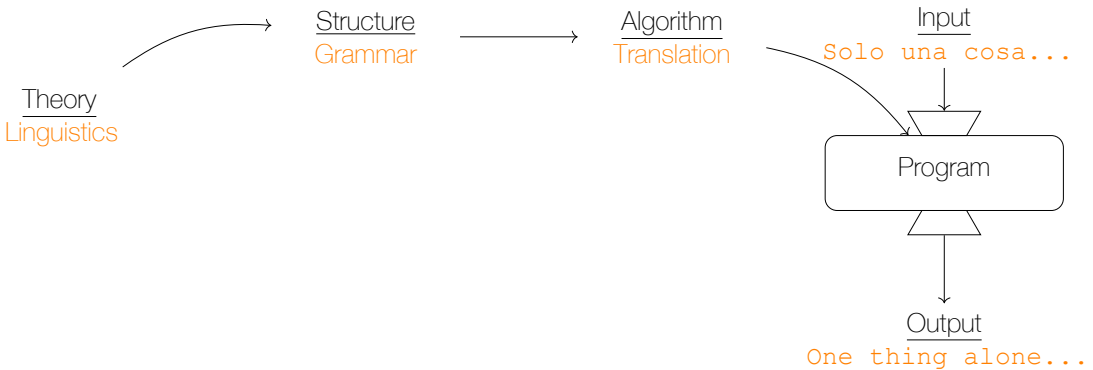
La structure implicite des données



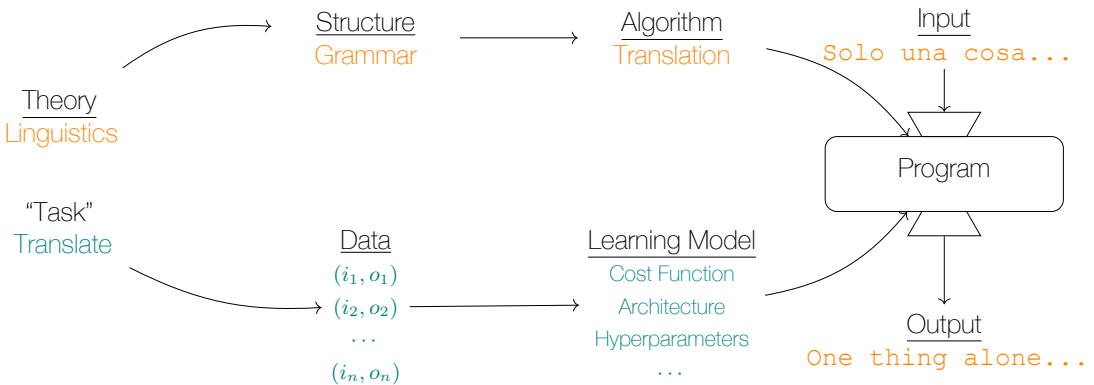
La structure implicite des données



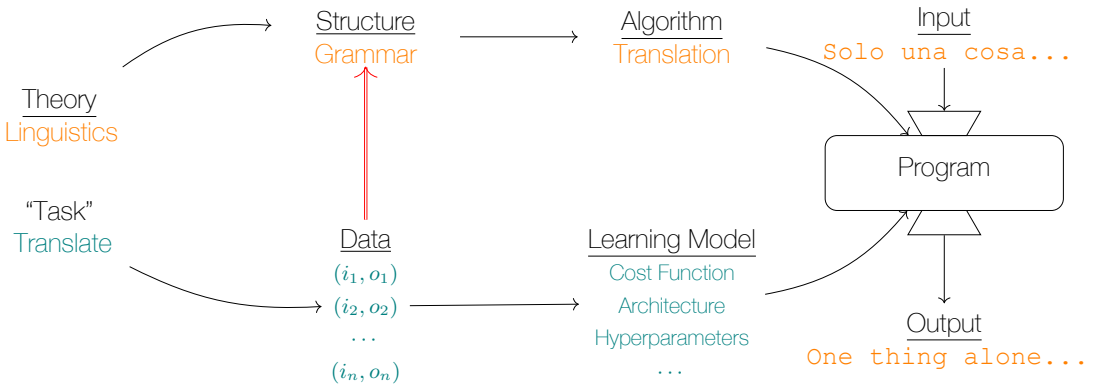
La structure implicite des données



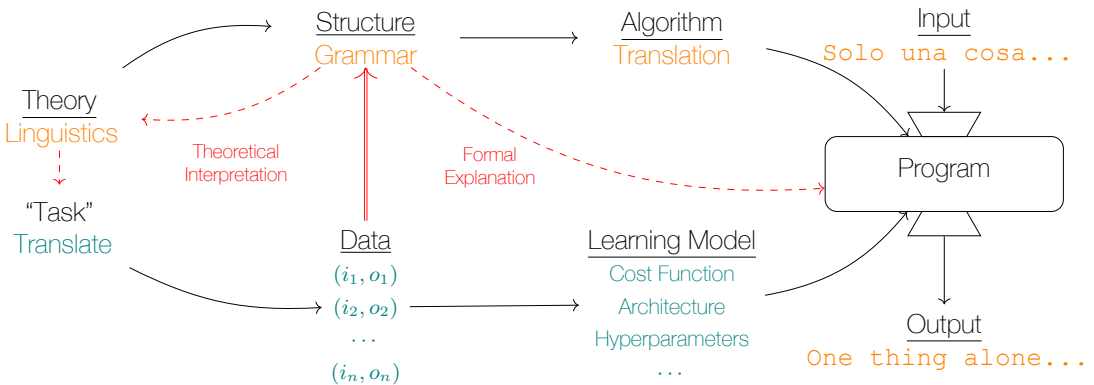
La structure implicite des données



La structure implicite des données



La structure implicite des données



2.14

2.1

2.1 *L'étude empirique des LLMs n'a pas de fondement épistémologique

2.11 L'informatique traverse un tournant empirique autour des LLMs

2.12 Mais les LLMs ne sont que des fonctions calculables

2.13 Il n'existe pas de moyen empirique de savoir ce qu'une fonction calculable fait

2.14 *La seule question épistémologique valide est: de quoi cette fonction est-elle l'implémentation?

2.21

2.22

2.23

2.2

2.2 *Les LLMs n’ont aucune portée cognitive a priori

2.21 La portée cognitive des modèles de langage computationnels n’est pas inconditionnelle

2.22 La condition épistémologique assurant un tel lien ne s’applique pas aux LLMs

2.23 L’absence de portée cognitive n’empêche pas les LLMs d’être des modèles du langage

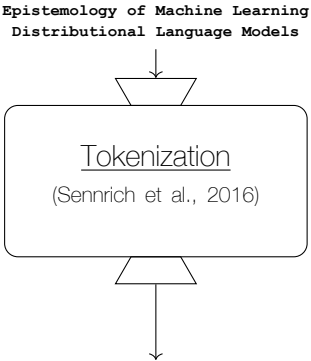
2

2 *Un formalisme critique habilite une *critique épistémologique* de l'IA

2.1 *L'étude empirique des LLMs n'a pas de fondement épistémologique

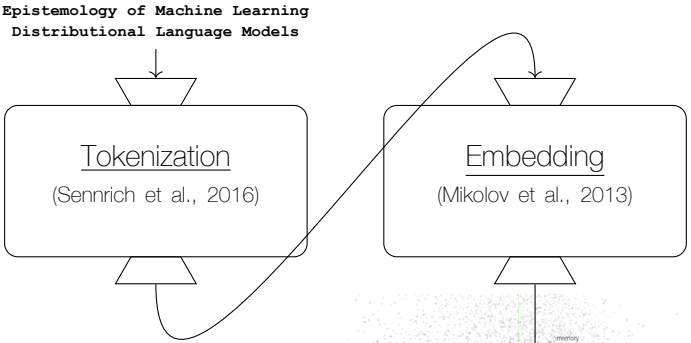
2.2 *Les LLMs n'ont aucune portée cognitive a priori

Dans la boîte noire



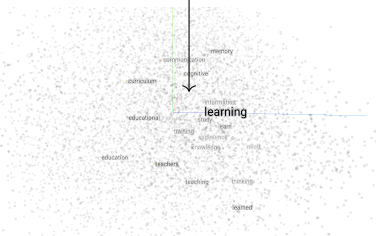
(https://tiktokenizer.vercel.app)

Dans la boîte noire



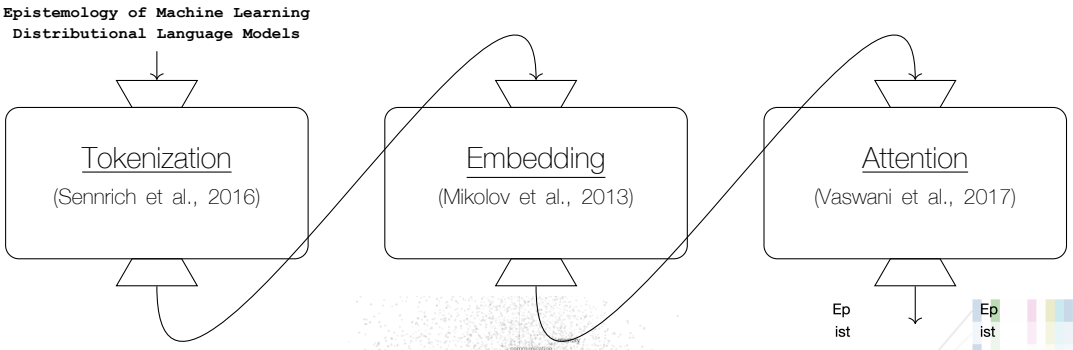
Epistemology of Machine Learning
Distributional Language Models

(https://tiktokenizer.vercel.app)

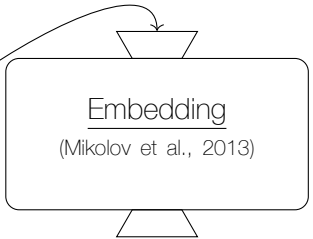


(https://projector.tensorflow.org)

3.1 Dans la boîte noire

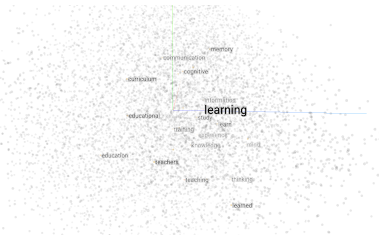


Dans la boîte noire



Epistemology of Machine Learning
Distributional Language Models

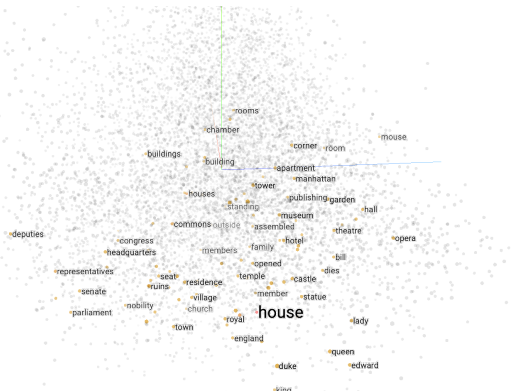
(https://tiktokenizer.vercel.app)



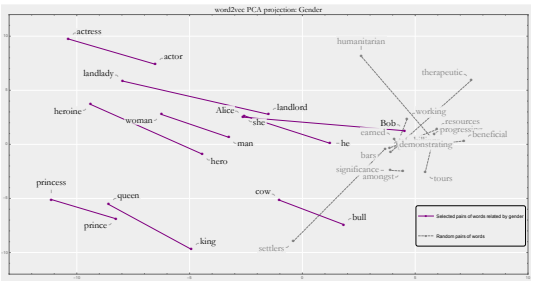
(https://projector.tensorflow.org)

3.1 Qu’est-ce qu’un embedding?

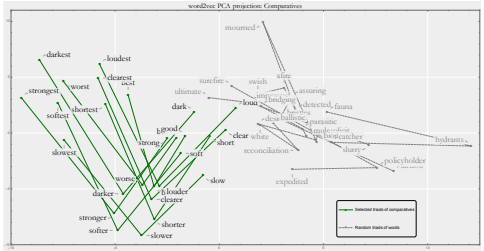
Embeddings: Similarity and Analogy

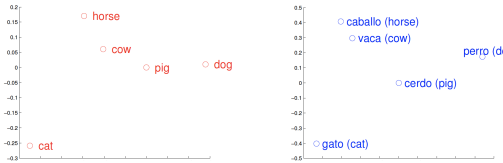


(https://projector.tensorflow.org)

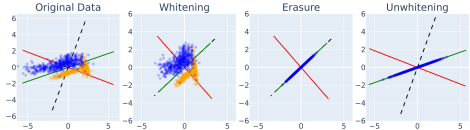


3.1 Embeddings: Other Applications

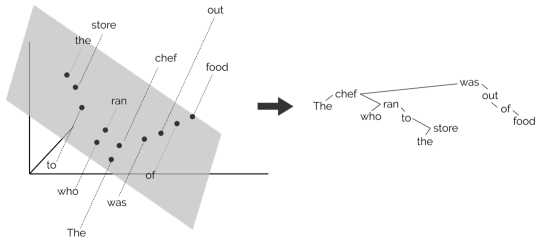




(Mikolov, Sutskever, Chen, Corrado, Dean, et al., 2013)



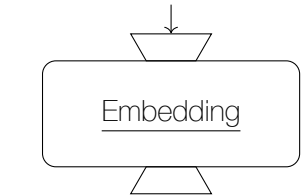
(Belrose et al., 2024)

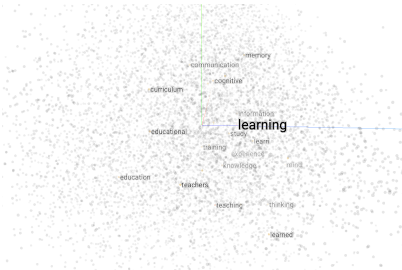


(https://nlp.stanford.edu/~johnhew/structural-probe.html)

3.1 L’espace latent

Epistemology of Machine Learning
Distributional Language Models





L'espace latent

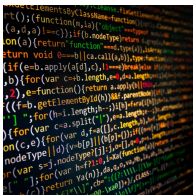
Structure

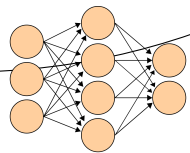
?

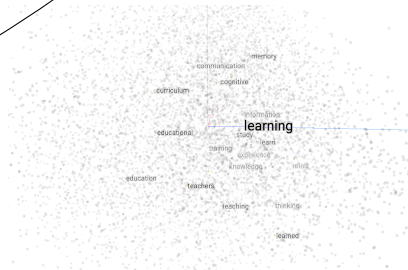
Epistemology of Machine Learning
Distributional Language Models

Embedding

Data







L'espace latent

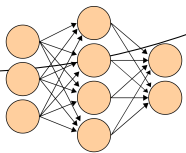
Structure

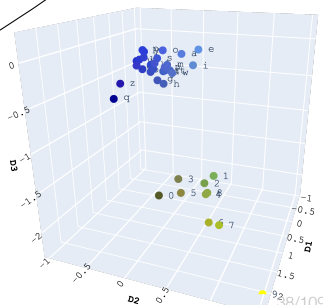
?

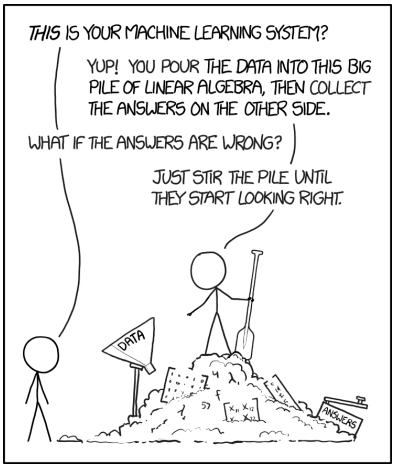
{-, /, 0, 1, 2, . . . , 8, 9, =,
a, b, c, . . . , w, x, y, z, é}

Embedding

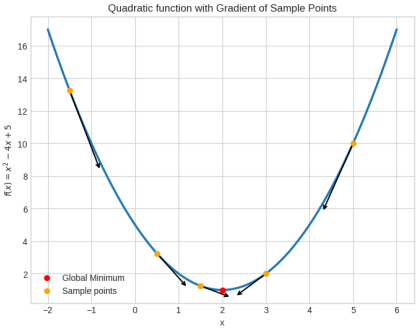
Data





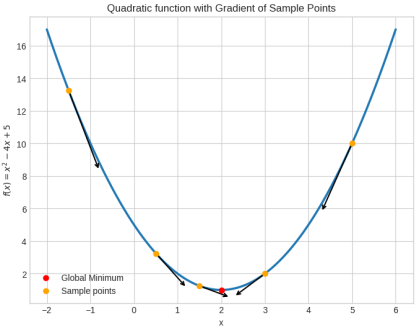


Credit: xkcd.com

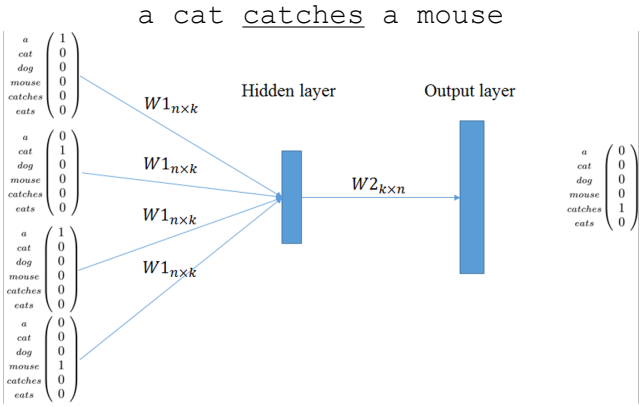


Credit: CodeSignal

word2vec



Credit: CodeSignal



Credit: Ferrone et al., 2017

3.1

word2vec expliqué (Levy and Goldberg, 2014)

$$\log \sigma(\vec{w} \cdot \vec{c}) + k \cdot \mathbb{E}_{c_N \sim P_D}[\log \sigma(-\vec{w} \cdot \vec{c}_N)]$$

Where:

$\vec{w}$	=	vector representation for word w
$\vec{c}$	=	vector representation for context c
$\sigma(x)$	=	$\frac{1}{1+e^{-x}}$
k	=	number of “negative” (arbitrary) samples
c_N	=	arbitrary context sampled from P_D
$P_D(c)$	=	empirical unigram distribution of c in the data D, i.e. $\frac{\#(c)}{\lvert D \rvert}$

word2vec expliqué (Levy and Goldberg, 2014)

$$\log \sigma(\vec{w} \cdot \vec{c}) + k \cdot \mathbb{E}_{c_N \sim P_D}[\log \sigma(-\vec{w} \cdot \vec{c}_N)]$$

word2vec expliqué (Levy and Goldberg, 2014)

$$\ell = \sum_{w \in V_w} \sum_{c \in V_c} \#(w, c)(\log \sigma(\vec{w} \cdot \vec{c}) + k \cdot \mathbb{E}_{c_N \sim P_D}[\log \sigma(-\vec{w} \cdot \vec{c}_N)])$$

word2vec expliqué (Levy and Goldberg, 2014)

$$\ell = \sum_{w \in V_w} \sum_{c \in V_c} \#(w, c)(\log \sigma(\vec{w} \cdot \vec{c}) + k \cdot \mathbb{E}_{c_N \sim P_D}[\log \sigma(-\vec{w} \cdot \vec{c}_N)])$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial(\vec{w} \cdot \vec{c})} = 0$$

word2vec expliqué (Levy and Goldberg, 2014)

$$\ell = \sum_{w \in V_w} \sum_{c \in V_c} \#(w,c)(\log \sigma(\vec{w} \cdot \vec{c}) + k \cdot \mathbb{E}_{c_N \sim P_D}[\log \sigma(-\vec{w} \cdot \vec{c}_N)])$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial(\vec{w} \cdot \vec{c})} = 0 \quad \text{when} \quad \vec{w} \cdot \vec{c} \ = \log \left(\frac{\#(w,c) \cdot |D|}{\#(w) \cdot \#(c)} \right) - \log k$$

word2vec expliqué (Levy and Goldberg, 2014)

$$\ell = \sum_{w \in V_w} \sum_{c \in V_c} \#(w,c)(\log \sigma(\vec{w} \cdot \vec{c}) + k \cdot \mathbb{E}_{c_N \sim P_D}[\log \sigma(-\vec{w} \cdot \vec{c}_N)])$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial(\vec{w} \cdot \vec{c})} = 0 \quad \text{when} \quad \vec{w} \cdot \vec{c} = \log \left(\frac{\#(w,c) \cdot |D|}{\#(w) \cdot \#(c)} \right) - \log k$$

$$= PMI(w,c) - \log k$$

word2vec expliqué (Levy and Goldberg, 2014)

$$\ell = \sum_{w \in V_w} \sum_{c \in V_c} \#(w,c)(\log \sigma(\vec{w} \cdot \vec{c}) + k \cdot \mathbb{E}_{c_N \sim P_D}[\log \sigma(-\vec{w} \cdot \vec{c}_N)])$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial(\vec{w} \cdot \vec{c})} = 0 \quad \text{when} \quad \begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{c} &= \log\left(\frac{\#(w,c) \cdot |D|}{\#(w) \cdot \#(c)}\right) - \log k \\ &= PMI(w,c) - \log k \end{aligned}$$

Additional constraint: $\vec{w}$ and $\vec{c}$ should be low dimensional

word2vec expliqué (Levy and Goldberg, 2014)

$$\ell = \sum_{w \in V_w} \sum_{c \in V_c} \#(w,c)(\log \sigma(\vec{w} \cdot \vec{c}) + k \cdot \mathbb{E}_{c_N \sim P_D}[\log \sigma(-\vec{w} \cdot \vec{c}_N)])$$

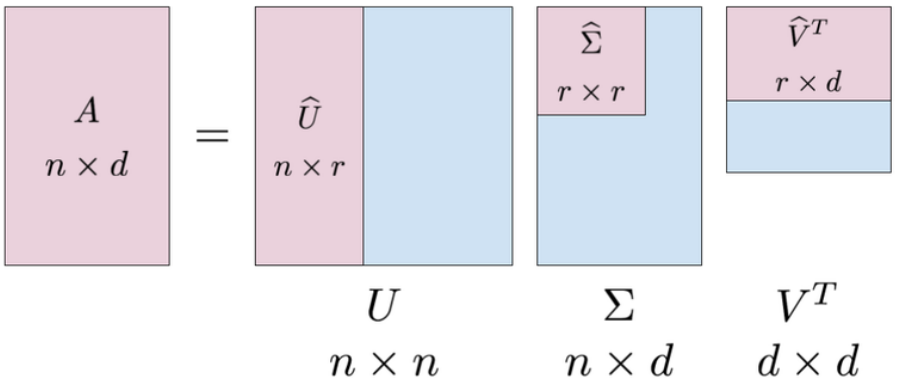
$$\frac{\partial \ell}{\partial(\vec{w} \cdot \vec{c})} = 0 \quad \text{when} \quad \begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{c} &= \log\left(\frac{\#(w,c) \cdot |D|}{\#(w) \cdot \#(c)}\right) - \log k \\ &= PMI(w,c) - \log k \end{aligned}$$

Additional constraint: $\vec{w}$ and $\vec{c}$ should be low dimensional

There exists an exact solution …

Décomposition en Valeurs Singulières (SVD)

$$M = U\Sigma V^*$$



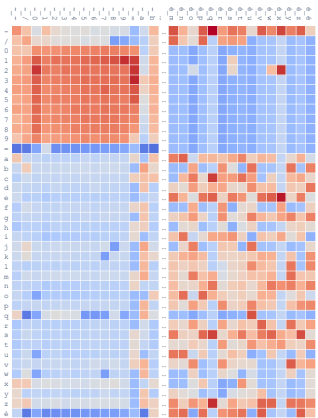
Credit: Angela Ju

Exemple: Caractères dans Wikipedia

$$W = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$$

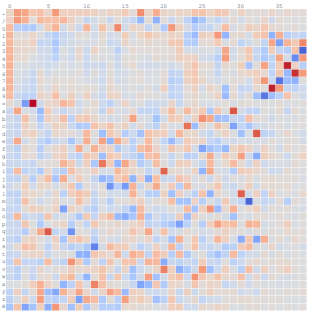
$$C = X \times X = \{\texttt{(-,-)}, \texttt{(-,/)}, \texttt{(-,0)}, \ldots, \texttt{(é,z)}, \texttt{(é,é)}\}$$

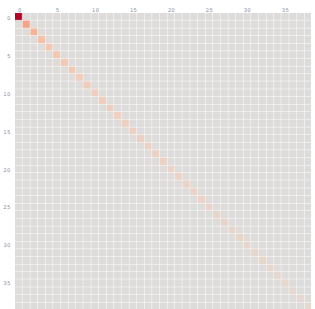
$$\begin{aligned} M_{wc} &= \text{pmi}(w, c) \\ &= \log \frac{p(w, c)}{p(w)p(c)} \end{aligned}$$

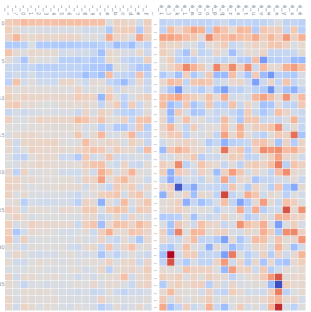


3.2 SVD sur une matrice PMI de caractères dans Wikipedia

$$U \qquad \Sigma \qquad V^T$$

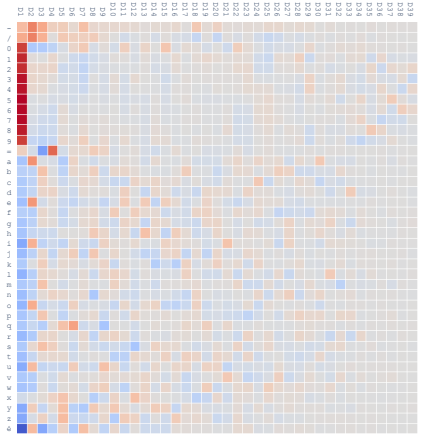






Tronquer

$$U \times \Sigma$$

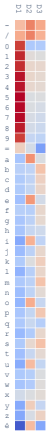


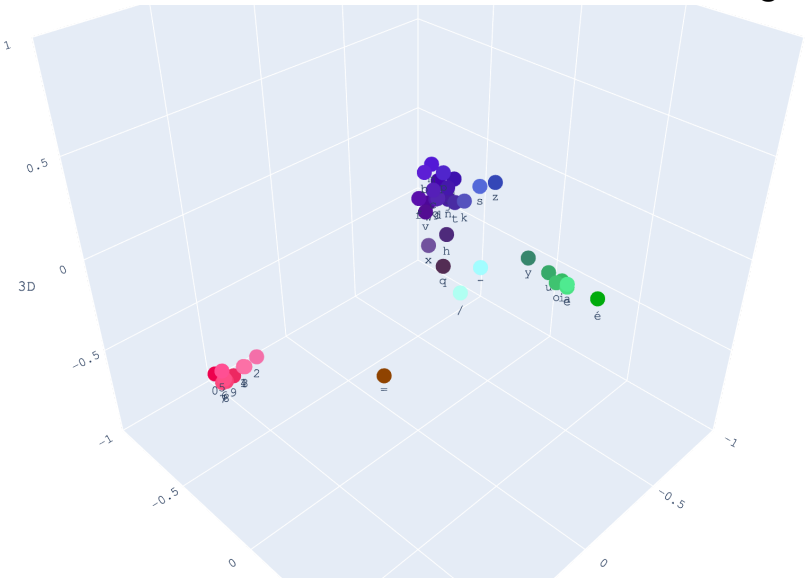
Tronquer

$$\hat{U} \times \hat{\Sigma}$$

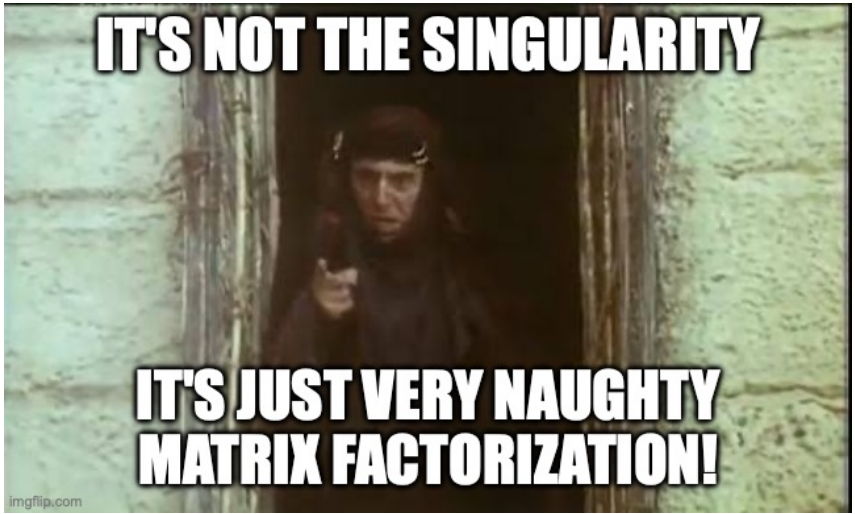
Plonger

$$\hat{U} \times \hat{\Sigma}$$





3.2


IT'S NOT THE SINGULARITY
IT'S JUST VERY NAUGHTY MATRIX FACTORIZATION!
imgflip.com

Structure de l'espace latent

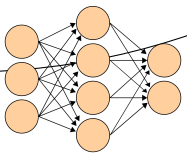
Structure

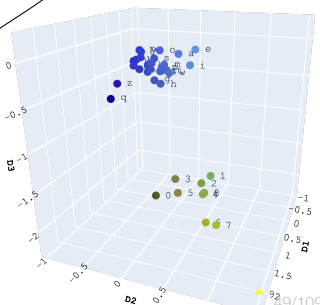
?

{-, /, 0, 1, 2, . . . , 8, 9, =,
a, b, c, . . . , w, x, y, z, é}

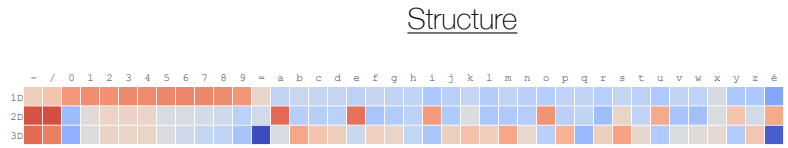
Embedding

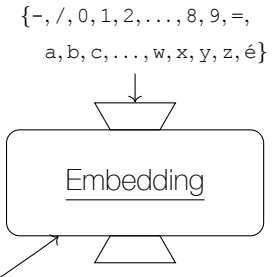
Data

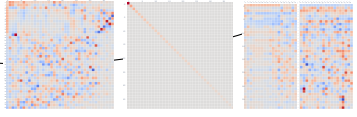


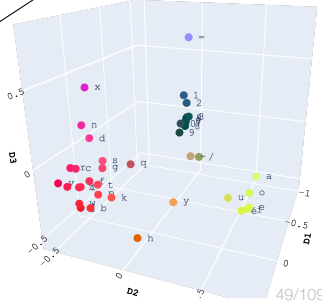


Structure de l'espace latent









4 Why does this produce good word representations?

Good question. We don't really know.

The distributional hypothesis states that words in similar contexts have similar meanings. The objective above clearly tries to increase the quantity $v_w \cdot v_c$ for good word-context pairs, and decrease it for bad ones. Intuitively, this means that words that share many contexts will be similar to each other (note also that contexts sharing many words will also be similar to each other). This is, however, very hand-wavy.

Can we make this intuition more precise? We'd really like to see something more formal.

(Goldberg and Levy, 2014)

3.3 Une matrice peut être comprise comme une fonction

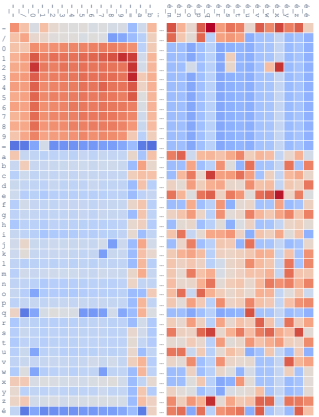
$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$

$$X = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$$

$$Y = X \times X = \{\texttt{(-,-)}, \texttt{(-,/)}, \texttt{(-,0)}, \ldots, \texttt{(é,z)}, \texttt{(é,é)}\}$$

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \mathrm{pmi}(x, y)$$



3.3 Une matrice peut être comprise comme une fonction

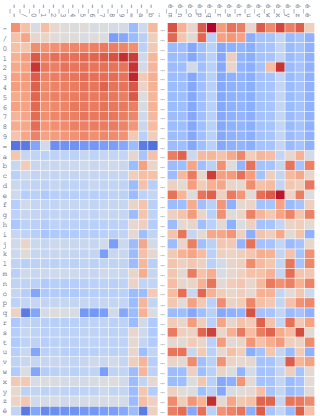
$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$

$$X = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$$

$$Y = X \times X = \{\texttt{(-,-)}, \texttt{(-,/)}, \texttt{(-,0)}, \ldots, \texttt{(é,z)}, \texttt{(é,é)}\}$$

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \mathrm{pmi}(x, y)$$

$$M_x : X \to \mathbb{R}^Y$$
$$x \mapsto M(x, -)$$



3.3 Une matrice peut être comprise comme une fonction

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$

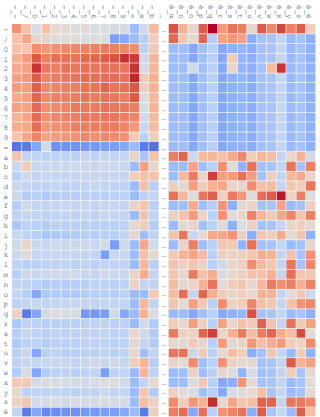
$$X = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$$

$$Y = X \times X = \{\texttt{(-,-)}, \texttt{(-,/)}, \texttt{(-,0)}, \ldots, \texttt{(é,z)}, \texttt{(é,é)}\}$$

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \mathrm{pmi}(x, y)$$

$$M_x : X \to \mathbb{R}^Y$$
$$x \mapsto M(x, -)$$

$$M_y : Y \to \mathbb{R}^X$$
$$y \mapsto M(-, y)$$



3.3 Une matrice peut être comprise comme une fonction

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$

$$X = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$$

$$Y = X \times X = \{\texttt{(-,-)}, \texttt{(-,/)}, \texttt{(-,0)}, \ldots, \texttt{(é,z)}, \texttt{(é,é)}\}$$

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \mathrm{pmi}(x, y)$$

$$M_x : X \to \mathbb{R}^Y$$
$$x \mapsto M(x, -)$$

$$M_y : Y \to \mathbb{R}^X$$
$$y \mapsto M(-, y)$$

$$X \xrightarrow{M_x} \mathbb{R}^Y$$

$$\mathbb{R}^X \xleftarrow[M_y]{} Y$$

3.3 Une matrice peut être comprise comme une fonction

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$

$$X = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$$

$$Y = X \times X = \{\texttt{(-,-)}, \texttt{(-,/)}, \texttt{(-,0)}, \ldots, \texttt{(é,z)}, \texttt{(é,é)}\}$$

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \mathrm{pmi}(x, y)$$

$$M_x : X \to \mathbb{R}^Y$$
$$x \mapsto M(x, -)$$

$$M_y : Y \to \mathbb{R}^X$$
$$y \mapsto M(-, y)$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{M_x} & \mathbb{R}^Y \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^X & \xleftarrow[M_y]{} & Y \end{array}$$

3.3 Une matrice peut être comprise comme une fonction

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$

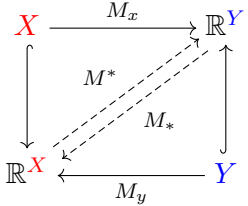
$$X = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$$

$$Y = X \times X = \{\texttt{(-,-)}, \texttt{(-,/)}, \texttt{(-,0)}, \ldots, \texttt{(é,z)}, \texttt{(é,é)}\}$$

$$M : X \times Y \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \mathrm{pmi}(x, y)$$

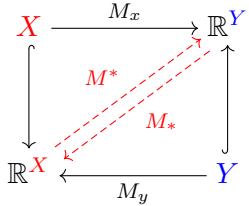
$$M_x : X \to \mathbb{R}^Y$$
$$x \mapsto M(x, -)$$

$$M_y : Y \to \mathbb{R}^X$$
$$y \mapsto M(-, y)$$



$$M^* : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^Y$$
$$M_* : \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$$

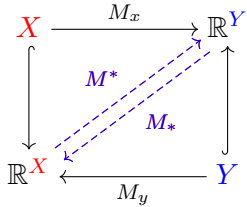
$M_* M^* : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$



Des matrices aux opérateurs distributionnels

$M_* M^* \colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$

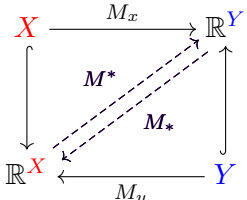
$M^* M_* \colon \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^Y$



Des matrices aux opérateurs distributionnels

$$M_* M^* \colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$$
$$M^* M_* \colon \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^Y$$

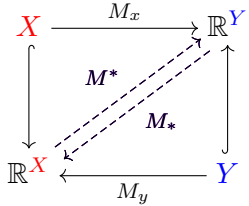
$$\{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}^X$$
$$\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^Y$$
$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_{\min(m,n)}, 0, \dots, 0\}$$



Des matrices aux opérateurs distributionnels

$$M_* M^* \colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$$
$$M^* M_* \colon \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^Y$$

$$\{u_1, \ldots, u_m\} \subset \mathbb{R}^X$$
$$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^Y$$
$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\min(m,n)}, 0, \ldots, 0\}$$



$$M = U \Sigma V^T$$

$$U := [u_1, \ldots, u_m]$$
$$V := [v_1, \ldots, v_n]$$
$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} \end{bmatrix}$$

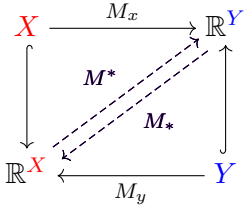
Des matrices aux opérateurs distributionnels

$$M_* M^* \colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$$
$$M^* M_* \colon \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^Y$$

$$\{u_1, \ldots, u_m\} \subset \mathbb{R}^X$$
$$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^Y$$
$$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\min(m,n)}, 0, \ldots, 0\}$$

$$M_* M^* u_i = \lambda_i u_i$$
$$M^* M_* v_i = \lambda_i v_i$$

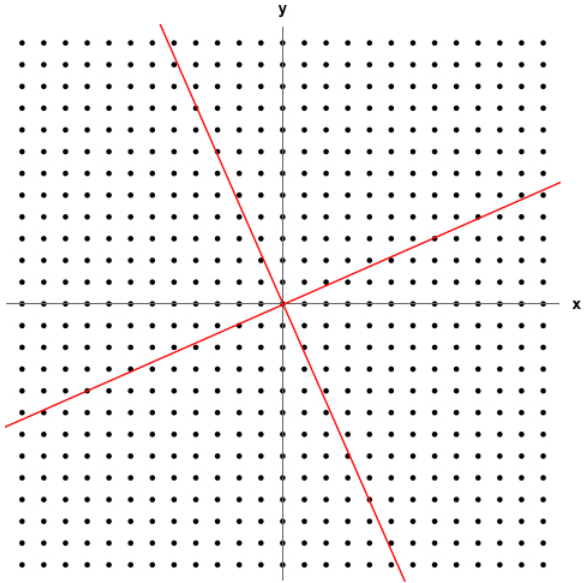
The u_i and v_i are (linear) fixed points!



$$M = U \Sigma V^T \qquad U := [u_1, \ldots, u_m] \qquad V := [v_1, \ldots, v_n]$$

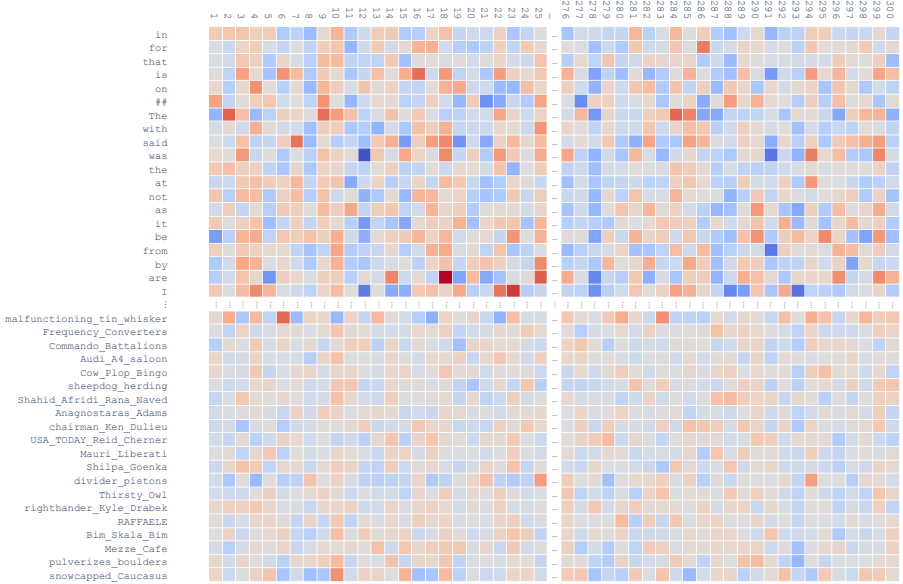
$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} \end{bmatrix}$$

3.3 Vecteurs propres (points fixes linéaires)

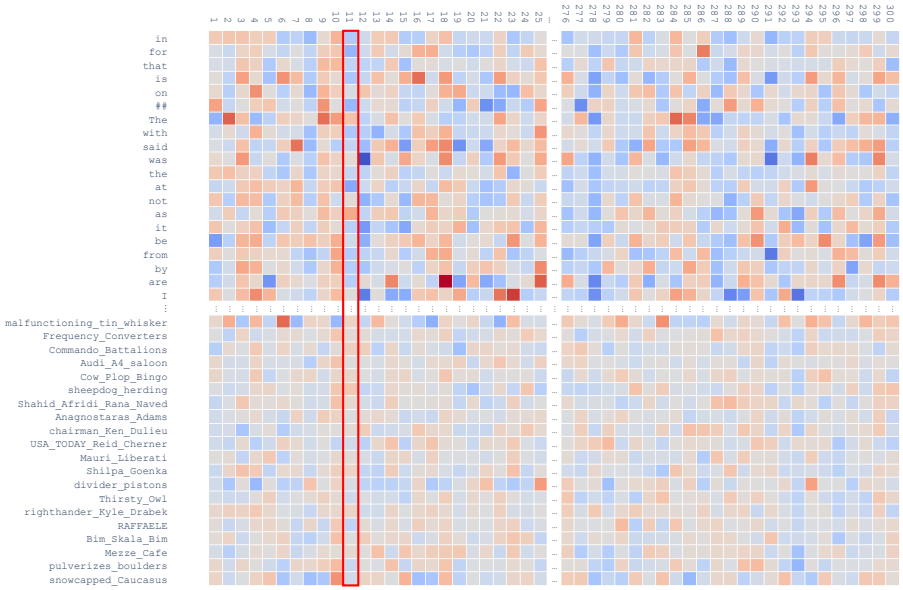


3.3 Embeddings en tant que points fixes

3.3 Embeddings en tant que points fixes

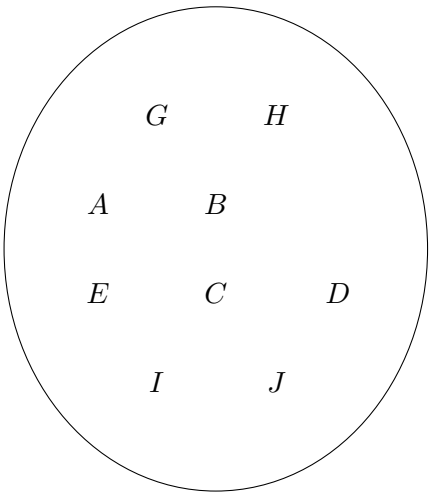


3.3 Embeddings en tant que points fixes

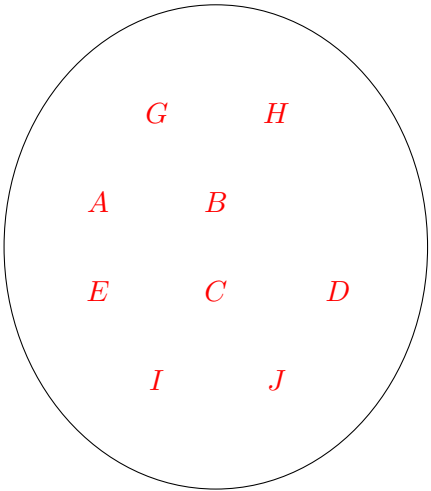


3.3

3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure



3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure

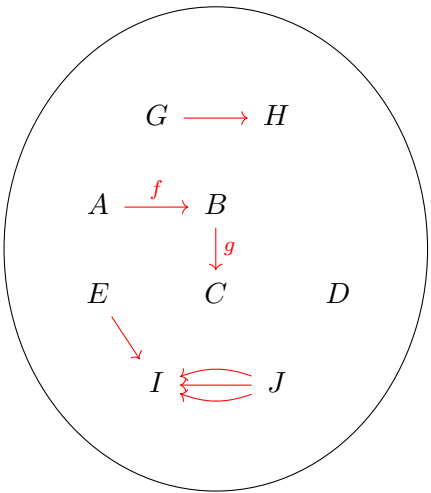


Definition (Category – Awodey, 2010)

Data:

- Objects: $A, B, C, \ldots$

3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure

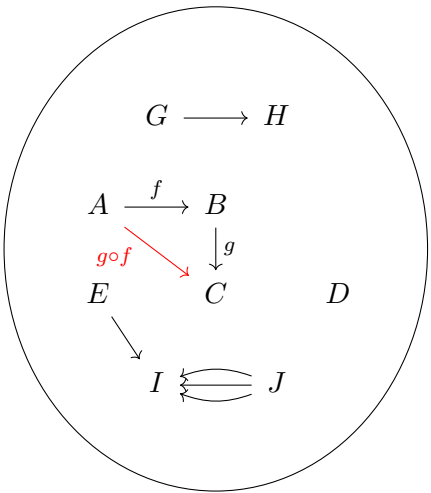


Definition (Category – Awodey, 2010)

Data:

- Objects: $A, B, C, \ldots$
- Arrows: $f, g, \ldots$

3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure



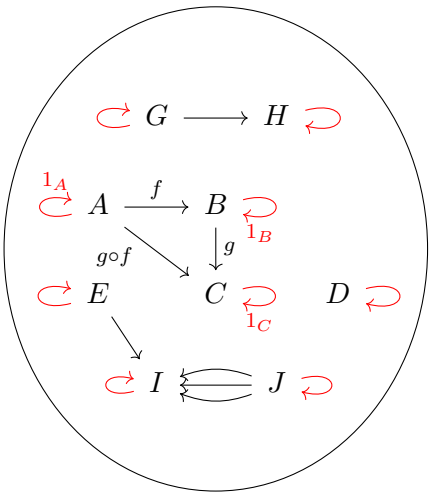
Definition (Category – Awodey, 2010)

Data:

- Objects: $A, B, C, \ldots$
- Arrows: $f, g, \ldots$
- Composition: Given $f : A \to B$ and $g : B \to C$, there is given an arrow

$$g \circ f : A \to C$$

3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure



Definition (Category – Awodey, 2010)

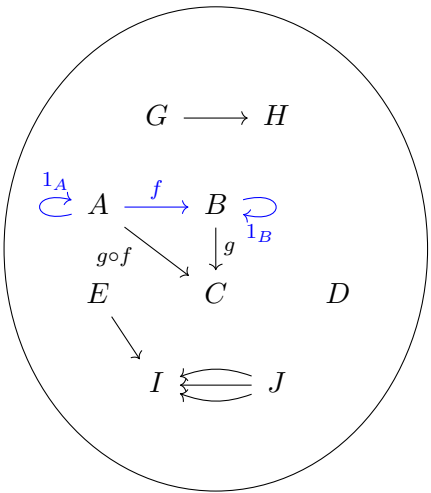
Data:

- Objects: $A, B, C, \ldots$
- Arrows: $f, g, \ldots$
- Composition: Given $f : A \to B$ and $g : B \to C$, there is given an arrow

$$g \circ f : A \to C$$

- Identity: For each A, there is $1_A : A \to A$

3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure



Definition (Category – Awodey, 2010)

Data:

- Objects: $A, B, C, \ldots$
- Arrows: $f, g, \ldots$
- Composition: Given $f : A \to B$ and $g : B \to C$, there is given an arrow

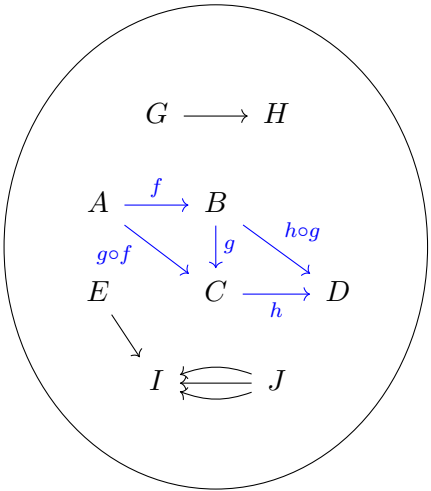
$$g \circ f : A \to C$$

- Identity: For each A, there is $1_A : A \to A$

Laws:

- Unit: $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$

3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure



Definition (Category – Awodey, 2010)

Data:

- Objects: $A, B, C, \ldots$
- Arrows: $f, g, \ldots$
- Composition: Given $f : A \to B$ and $g : B \to C$, there is given an arrow

$$g \circ f : A \to C$$

- Identity: For each A, there is $1_A : A \to A$

Laws:

- Unit: $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$
- Associativity: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

3.411

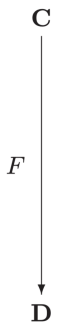
Un foncteur est une application entre catégories

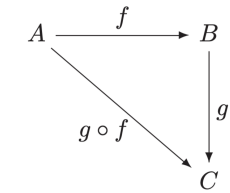
Definition (Functor – Awodey, 2010)

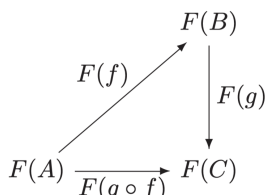
A *functor*

$$F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$$

between categories C and D is a mapping of objects to objects and arrows to arrows, in such a way that







Un foncteur est une application entre catégories

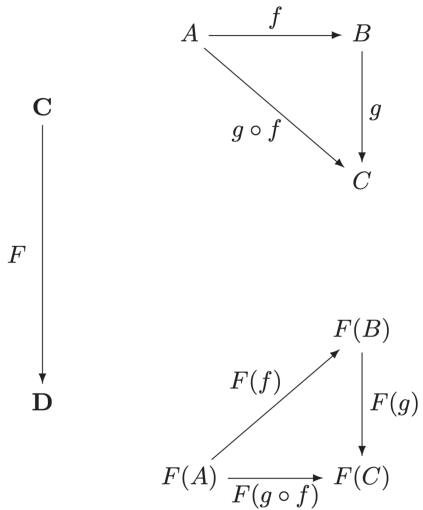
Definition (Functor – Awodey, 2010)

A *functor*

$$F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$$

between categories C and D is a mapping of objects to objects and arrows to arrows, in such a way that

(a) $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$



Un foncteur est une application entre catégories

Definition (Functor – Awodey, 2010)

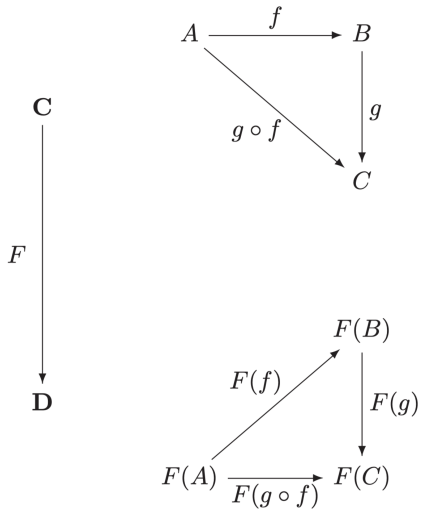
A *functor*

$$F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$$

between categories C and D is a mapping of objects to objects and arrows to arrows, in such a way that

(a) $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$

(b) $F(1_A) = 1_{F(A)}$



Un foncteur est une application entre catégories

Definition (Functor – Awodey, 2010)

A *functor*

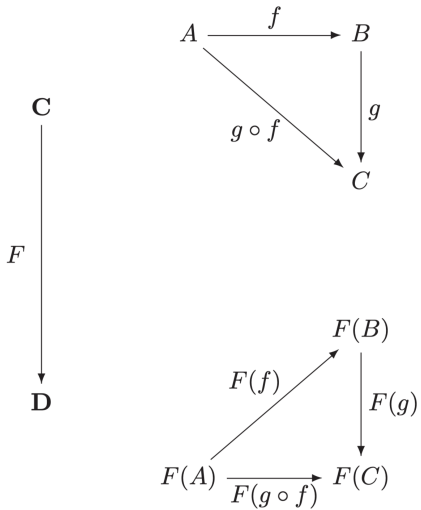
$$F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$$

between categories C and D is a mapping of objects to objects and arrows to arrows, in such a way that

(a) $F(f : A \to B) = F(f) : F(A) \to F(B)$

(b) $F(1_A) = 1_{F(A)}$

(c) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$



3.412

Definition 2.15. In any category $\mathbf{C}$, a *product diagram* for the objects A and B consists of an object P and arrows

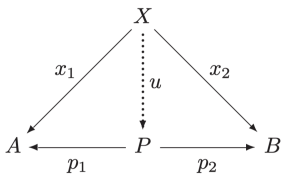
$$A \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} B$$

satisfying the following UMP:

Given any diagram of the form

$$A \xleftarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2} B$$

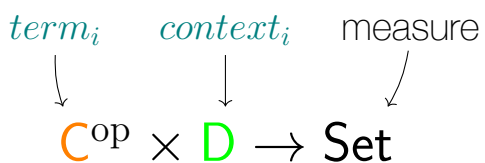
there exists a unique $u : X \to P$, making the diagram



commute, that is, such that $x_1 = p_1 u$ and $x_2 = p_2 u$.

(Awodey, 2010)

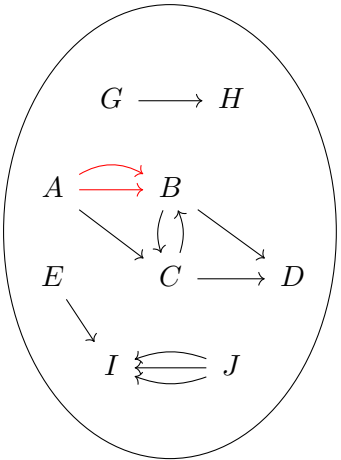
3.413 Un profoncteur est un foncteur du produit de deux catégories quelconques vers la catégorie Set



3.413

3.414 Une catégorie enrichie sur $\mathcal{V}$ est une catégorie dont les flèches entre deux objets sont des valeurs dans $\mathcal{V}$

$$\begin{aligned} &\mathsf{hom}(A,B) \\ &\mathsf{C}(A,B) \quad = \{f \in \mathsf{C} | f : A \to B\} \end{aligned}$$

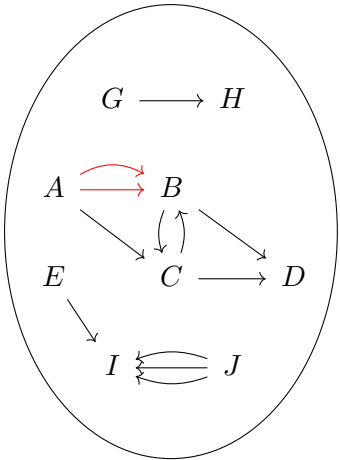


3.414 Une catégorie enrichie sur $\mathcal{V}$ est une catégorie dont les flèches entre deux objets sont des valeurs dans $\mathcal{V}$

$\mathsf{hom}(A, B)$

$\mathsf{C}(A, B) \quad = \{f \in \mathsf{C} | f : A \to B\}$

$\mathsf{C}(A, B) \in \mathsf{Set}$



3.414 Une catégorie enrichie sur $\mathcal{V}$ est une catégorie dont les flèches entre deux objets sont des valeurs dans $\mathcal{V}$

$\mathsf{hom}(A, B)$

$\mathsf{C}(A, B) \quad = \{f \in \mathsf{C} | f : A \to B\}$

$\mathsf{C}(A, B) \in \mathsf{Set}$

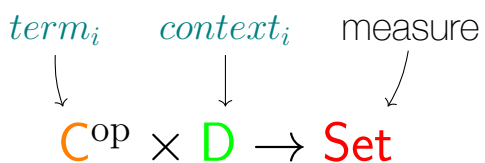
Enrichment over $\mathcal{V}$

$\mathsf{C}(A, B) \in \mathcal{V}$,

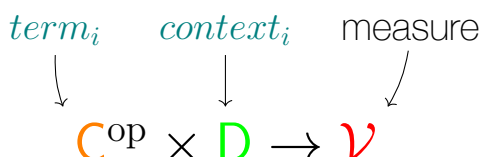
where $\mathcal{V}$ is a "nice" (monoidal) category

3.414

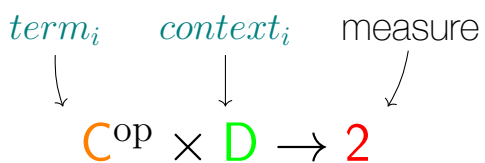
3.415 Un foncteur entre les catégories enrichies $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$ induit un profoncteur $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathcal{V}$



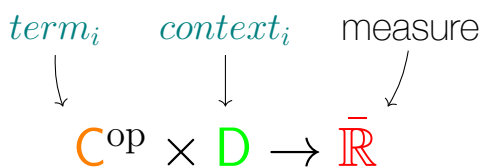
3.415 Un foncteur entre les catégories enrichies $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$ induit un profoncteur $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathcal{V}$



3.415 Un foncteur entre les catégories enrichies $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$ induit un profoncteur $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathcal{V}$



3.415 Un foncteur entre les catégories enrichies $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$ induit un profoncteur $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathcal{V}$



3.415

3.41

3.41 *De l'algèbre linéaire à la *théorie des catégories*

3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure

3.412 Un foncteur est une application entre catégories

3.413 Un profoncteur est un foncteur du produit de deux catégories quelconques vers la catégorie Set

3.414 Une catégorie enrichie sur $\mathcal{V}$ est une catégorie dont les flèches entre deux objets sont des valeurs dans $\mathcal{V}$

3.415 Un foncteur entre les catégories enrichies $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$ induit un profoncteur $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathcal{V}$

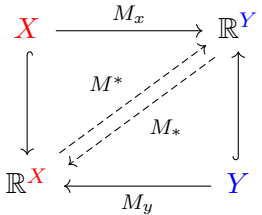
3.42 Embeddings en tant que foncteurs sur des catégories

$$X = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$$
$$Y = X \times X = \{\texttt{(-,-)}, \texttt{(-,/)}, \texttt{(-,0)}, \ldots, \texttt{(é,z)}, \texttt{(é,é)}\}$$

$$M \colon X \times Y \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \mathrm{pmi}(x, y)$$

$$M_x \colon X \to \mathbb{R}^Y$$
$$x \mapsto M(x, -)$$

$$M_y \colon Y \to \mathbb{R}^X$$
$$y \mapsto M(-, y)$$



$$M^* \colon \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^Y$$
$$M_* \colon \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$$

3.42 Embeddings en tant que foncteurs sur des catégories

$\mathsf{C} = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$

$\mathsf{D} = \mathsf{C} = \{\texttt{-}, \texttt{/}, \texttt{0}, \texttt{1}, \texttt{2}, \texttt{3}, \texttt{4}, \texttt{5}, \texttt{6}, \texttt{7}, \texttt{8}, \texttt{9}, \texttt{=}, \texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c}, \ldots, \texttt{w}, \texttt{x}, \texttt{y}, \texttt{z}, \texttt{é}\}$

Profunctor

$\mathcal{M} \colon \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathsf{Set}$

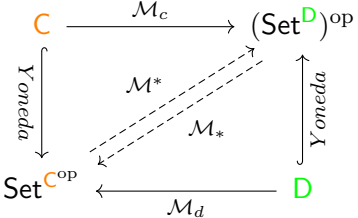
$(c, d) \mapsto \mathcal{M}(c, d)$

$\mathcal{M}_c \colon \mathsf{C} \to \left(\mathsf{Set}^{\mathsf{D}}\right)^{\mathrm{op}}$

$c \mapsto \mathcal{M}(c, -)$

$\mathcal{M}_d \colon \mathsf{D} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$

$d \mapsto \mathcal{M}(-, d)$



$\mathcal{M}^* \colon \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \to (\mathsf{Set}^{\mathsf{D}})^{\mathrm{op}}$

$\mathcal{M}_* \colon (\mathsf{Set}^{\mathsf{D}})^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$

Embeddings en tant que foncteurs sur des catégories

Adjonction d'Isbell

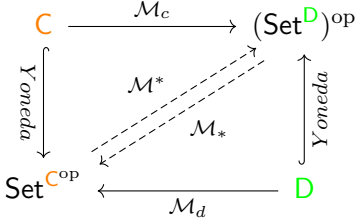
$$\mathcal{M}^* \colon \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \leftrightarrows (\mathsf{Set}^{\mathsf{D}})^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{M}_*$$

$$\mathcal{M}_*\mathcal{M}^* \colon \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \to \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}}$$
$$\mathcal{M}^*\mathcal{M}_* \colon (\mathsf{Set}^{\mathsf{D}})^{\mathrm{op}} \to (\mathsf{Set}^{\mathsf{D}})^{\mathrm{op}}$$

$$\mathrm{Fix}(\mathcal{M}_*\mathcal{M}^*) := \{f \in \mathsf{Set}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} | \mathcal{M}_*\mathcal{M}^*(f) \cong f\}$$
$$\mathrm{Fix}(\mathcal{M}^*\mathcal{M}_*) := \{g \in (\mathsf{Set}^{\mathsf{D}})^{\mathrm{op}} | \mathcal{M}^*\mathcal{M}_*(g) \cong g\}$$

Nucleus of $\mathcal{M} = \{(f_i, g_i)\}$, such that:
$\mathcal{M}^* f_i \cong g_i$ and $\mathcal{M}_* g_i \cong f_i$

Le noyeau (nucleus) est une catégorie complète et cocomplète



Les catégories C et D peuvent être enrichies!

E.g.:
$\mathcal{M}^* \colon 2^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \leftrightarrows (2^{\mathsf{D}})^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{M}_*$
$\mathcal{M}^* \colon \bar{\mathbb{R}}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} \leftrightarrows (\bar{\mathbb{R}}^{\mathsf{D}})^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{M}_*$

3.42

3.4

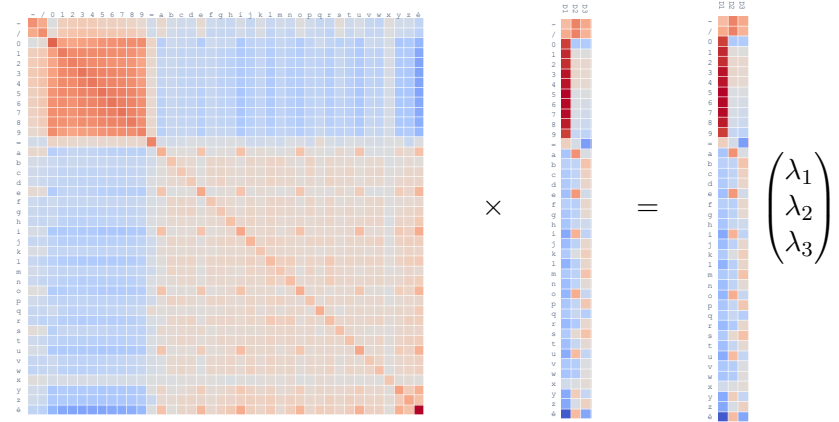
3.4 *Il est possible de généraliser ce résultat

3.41 *De l'algèbre linéaire à la *théorie des catégories*

3.42 *Il existe un parallèle profond entre des opérateurs linéaires et catégoriques

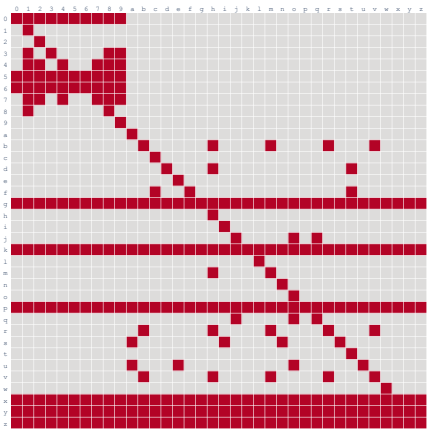
Points fixes binaires

$$M_* M^* u = \lambda u$$

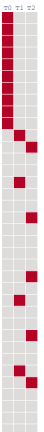


Points fixes binaires

$$\mathcal{M}_*\mathcal{M}^* f = f$$



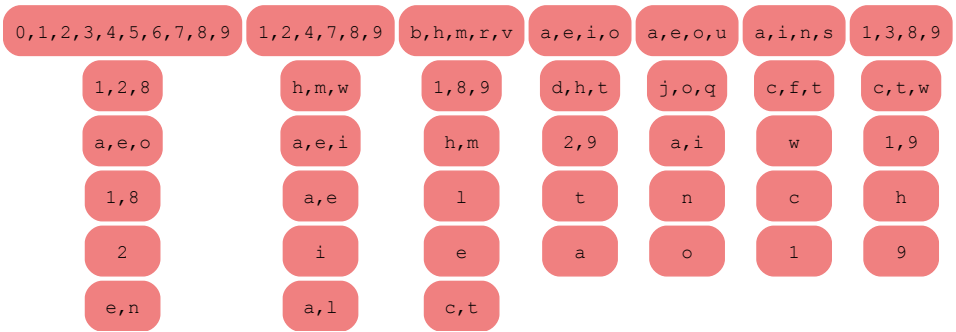
$\star$



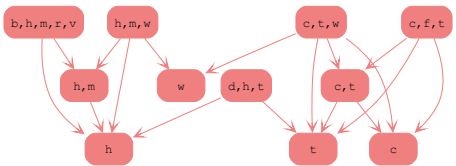
$\stackrel{?}{=}$

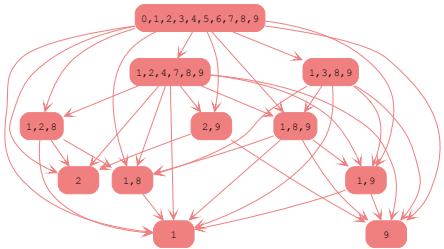
“Eigensets”

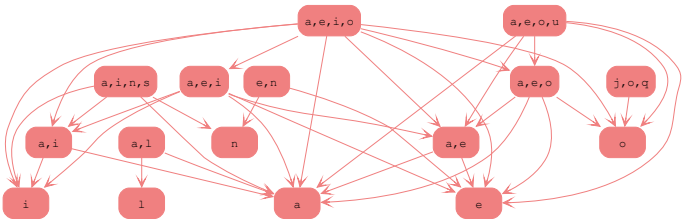
$$\mathcal{M}_* \mathcal{M}^* f = f$$



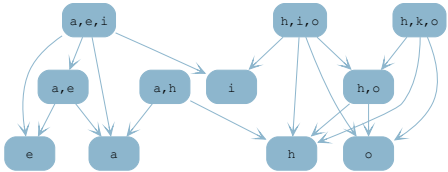
Structure d'ordre partiel

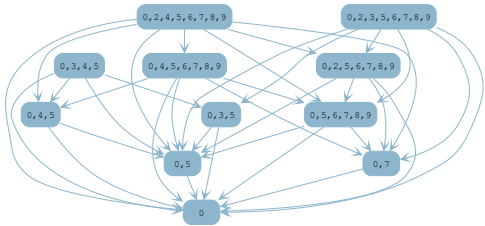


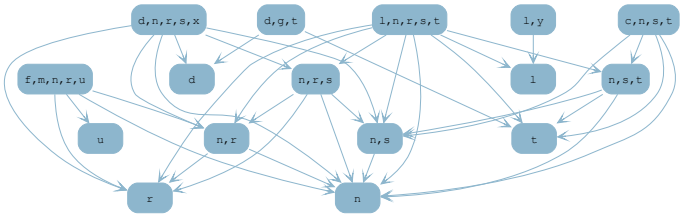




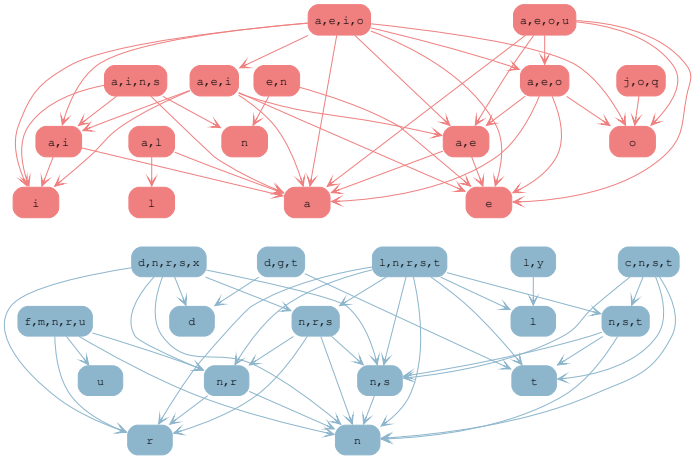
Ordre partiel dual

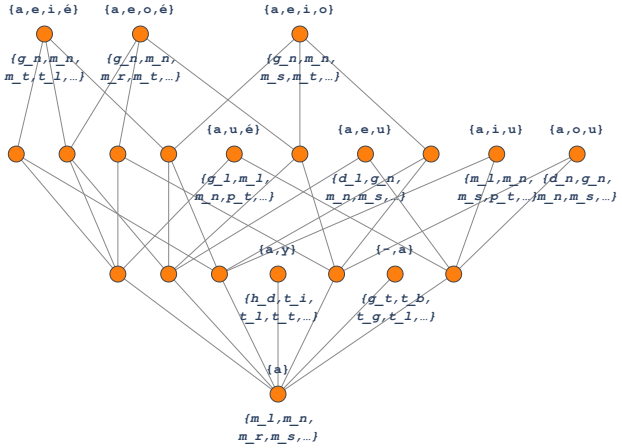


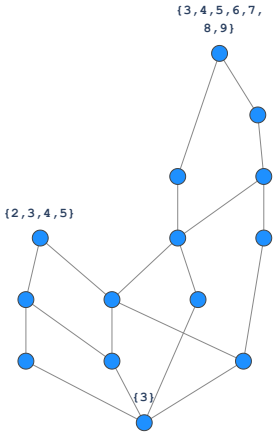




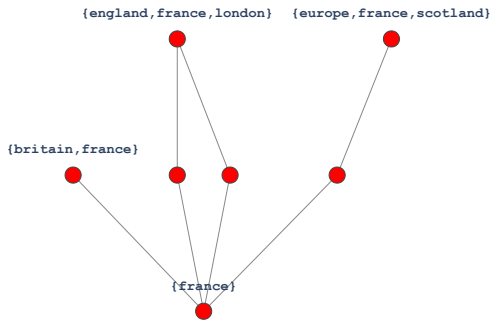
Couplage des ordres partiels des points fixes

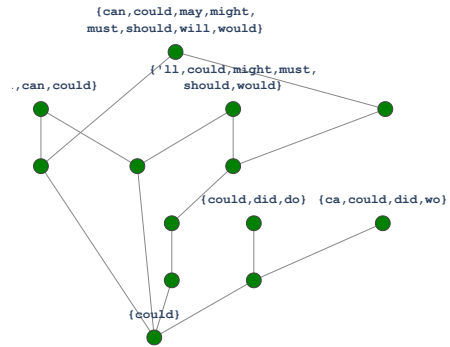



{a,e,i,é}
{a,e,o,é}
{a,e,i,o}
{g_n,m_n, m_t,t_l,…}
{g_n,m_n, m_r,m_t,…}
{g_n,m_n, m_s,m_t,…}
{a,u,é}
{a,e,u}
{a,i,u}
{a,o,u}
{g_l,m_l m_n,p_t,…}
{d_l,g_n, m_n,m_s,…}
{m_l,m_n, m_s,p_t,…}
{d_n,g_n, m_n,m_s,…}
{a,y}
{-,a}
{h_d,t_i, t_l,t_t,…}
{g_t,t_b, t_g,t_l,…}
{a}
{m_l,m_n, m_r,m_s,…}

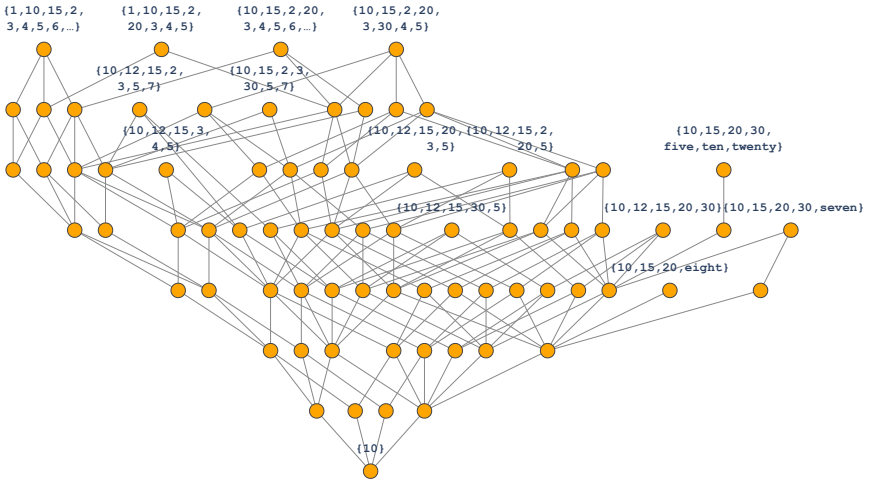

{3,4,5,6,7, 8,9}
{2,3,4,5}
{3}

Concepts formels (mots)



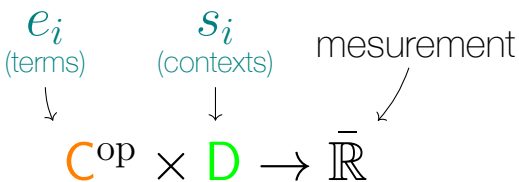


Concepts formels (mots)

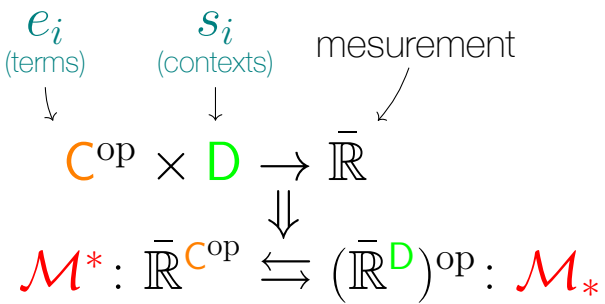


3.51

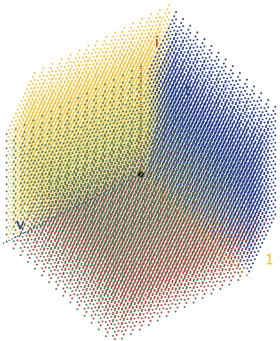
Noyeau d'un profoncteur sur $\bar{\mathbb{R}}$



Noyeau d'un profoncteur sur $\bar{\mathbb{R}}$

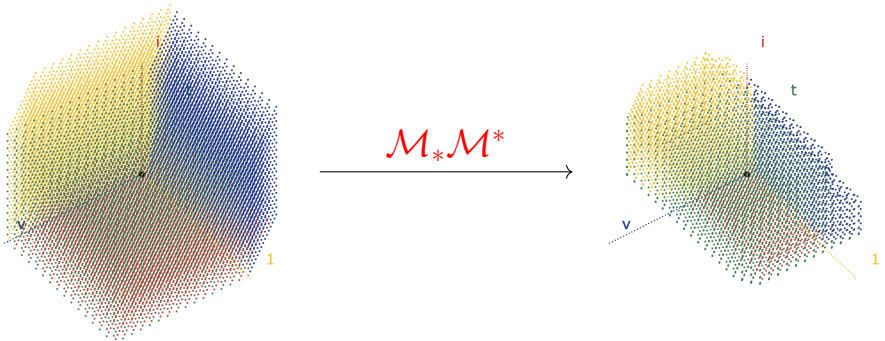


Noyeau d'un profoncteur sur $\bar{\mathbb{R}}$



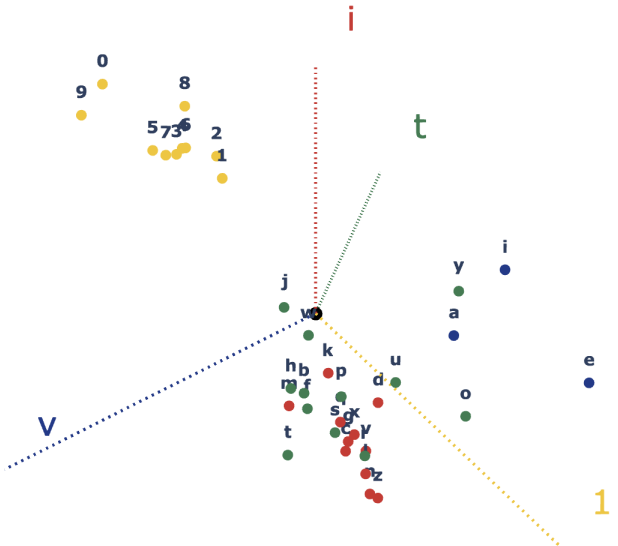
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} & \to & \bar{\mathbb{R}} \\ & \Downarrow & \\ \mathcal{M}^* \colon \bar{\mathbb{R}}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} & \leftrightarrows & \left(\bar{\mathbb{R}}^{\mathsf{D}}\right)^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{M}_* \end{array}$$

Noyeau d'un profoncteur sur $\bar{\mathbb{R}}$

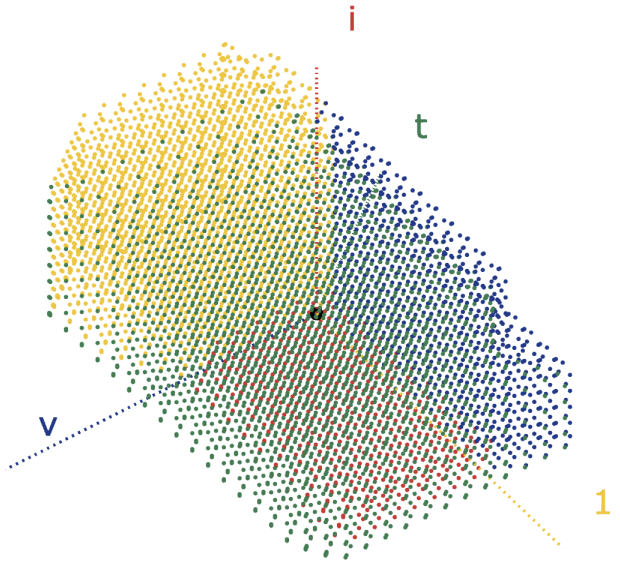


$$\begin{array}{ccc} \mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} & \to & \bar{\mathbb{R}} \\ & \Downarrow & \\ \mathcal{M}^* \colon \bar{\mathbb{R}}^{\mathsf{C}^{\mathrm{op}}} & \leftrightarrows & \left(\bar{\mathbb{R}}^{\mathsf{D}}\right)^{\mathrm{op}} \colon \mathcal{M}_* \end{array}$$

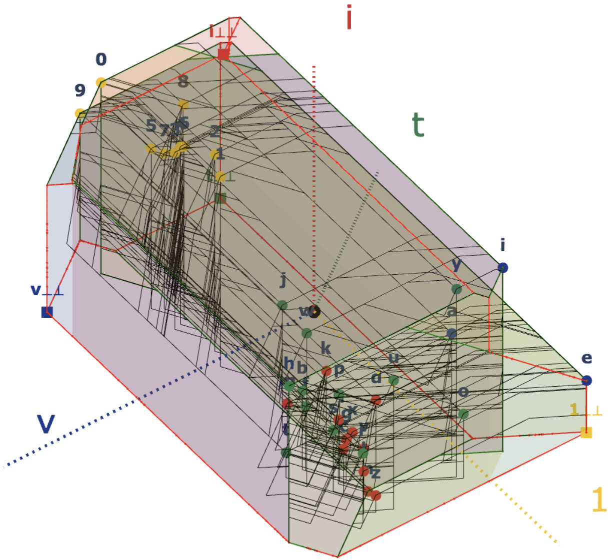
Géométrie du noyeau



Géométrie du noyeau



Géométrie du noyeau

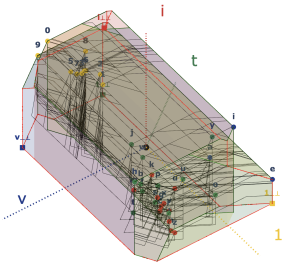


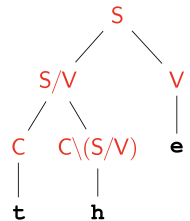
Definition (Polar/Orthogonal - Girard, 2011)

[G]iven a binary operation, noted $a, b \rightsquigarrow \langle a|b\rangle : A \times B \to C$ and a subset $P \subset C$ (the 'pole') one can define the *polar* $X^\perp \subset B$ of a subset $X \subset A$ (resp. $Y^\perp \subset A$ of a subset $Y \subset B$) by :

$$X^\perp := \{y \in B : \forall x \in X, \langle a|b\rangle \in P\}$$
$$Y^\perp := \{x \in A : \forall y \in Y, \langle a|b\rangle \in P\}$$

- The map 'polar' is decreasing: $X \subset X' \Rightarrow X'^\perp \subset X^\perp$.
- The set $\mathrm{Pol}(A) \subset \mathcal{P}(A)$ of *polar* sets, i.e., of the form $Y^\perp$, is closed under arbitrary intersections. In particular, A is polar and $X^{\perp\perp}$ is the smallest polar set containing X.
- As a consequence, $X^{\perp\perp\perp} = X^\perp$.





(Gastaldi and Pellissier, 2021a)

3.52

3.5

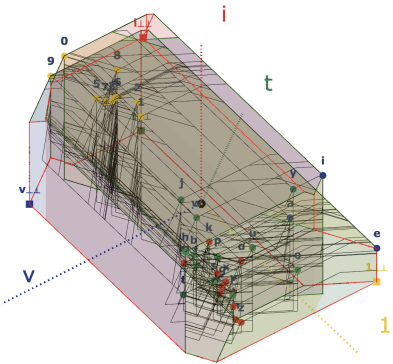
3.5 *Cette généralisation permet de révéler beaucoup plus de structure

3.51 *Enrichissement sur $\mathbf{2}$: Concepts formels

3.52 Enrichissement sur $\bar{\mathbb{R}}$

Tokenisation, embeddings, attention

Structure

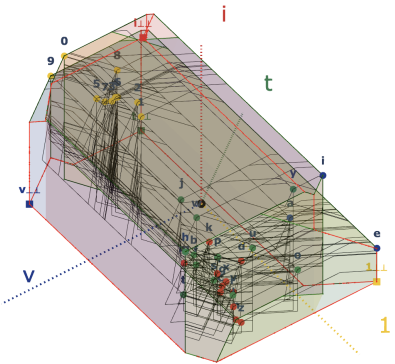


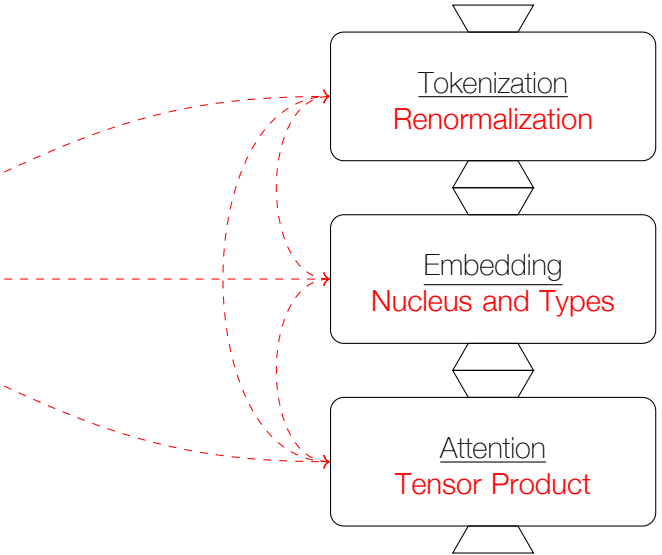
Embedding

Nucleus and Types

Tokenisation, embeddings, attention

Structure





3.6

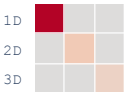
3

3 *Cette critique épistémologique offre les fondéments d'une *explicabilité formelle* des LLMs

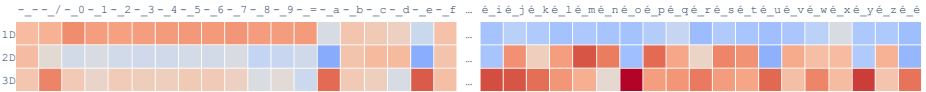
- 3.1 *La clé formelle des LLMs réside dans les *embeddings*
- 3.2 *SVD d'une matrice PMI fournit l'explication formelle des embeddings
- 3.3 *Ce résultat a d'importantes conséquences pour l'explicabilité
- 3.4 *Il est possible de généraliser ce résultat
- 3.5 *Cette généralisation permet de révéler beaucoup plus de structure
- 3.6 Le noyau du profoncteur pourrait permettre d'étudier la tokenisation, les embeddings et l'attention de manière formellement unifiée

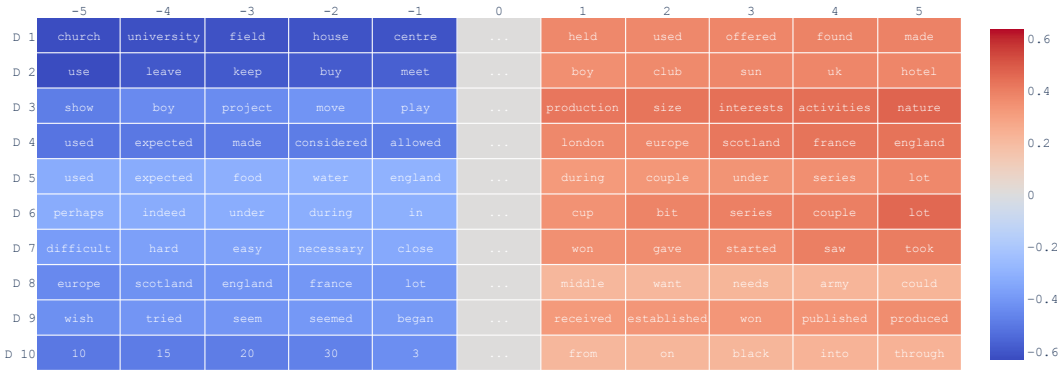
Eigenvectors of M_*M^*:

Eigenvalues of M_*M^* and M^*M_*:



Eigenvectors of M^*M_*:




−5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5
D 1 church university field house centre ... held used offered found made
D 2 use leave keep buy meet ... boy club sun uk hotel
D 3 show boy project move play ... production size interests activities nature
D 4 used expected made considered allowed ... london europe scotland france england
D 5 used expected food water england ... during couple under series lot
D 6 perhaps indeed under during in ... cup bit series couple lot
D 7 difficult hard easy necessary close ... won gave started saw took
D 8 europe scotland england france lot ... middle want needs army could
D 9 wish tried seem seemed began ... received established won published produced
D 10 10 15 20 30 3 ... from on black into through
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6

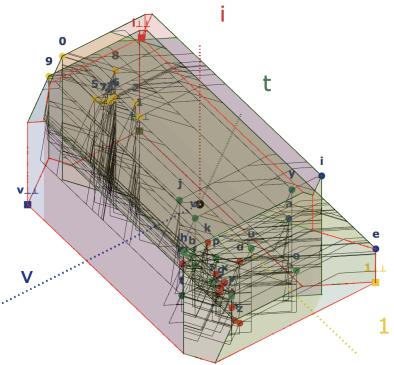
4.1

4.2 De l’hypothèse distributionnelle à l’hypothèse structuraliste

Theory
“Task”

?

Structure



4.2 De l'hypothèse distributionnelle à l'hypothèse structuraliste

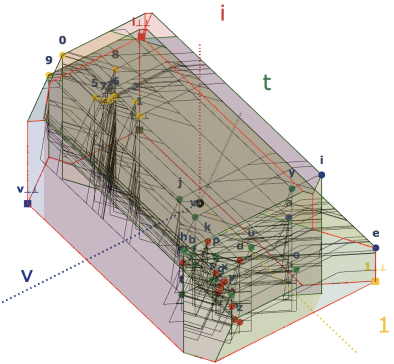
$$C^{op} \times D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

Hypothèse distributionnelle

Le contenu des unités linguistiques est déterminé par leur *distribution* dans un corpus.

Theory
"Task"

Structure



4.2 De l'hypothèse distributionnelle à l'hypothèse structuraliste

$$C^{op} \times D \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

Hypothèse distributionnelle

Le contenu des unités linguistiques est déterminé par leur *distribution* dans un corpus.

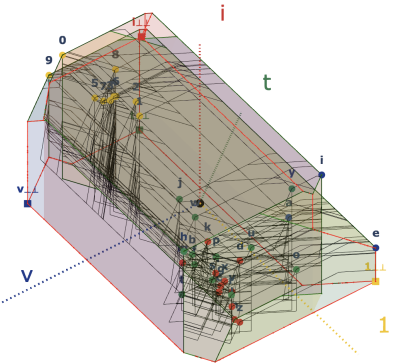
Theory
"Task"

Hypothèse structurale

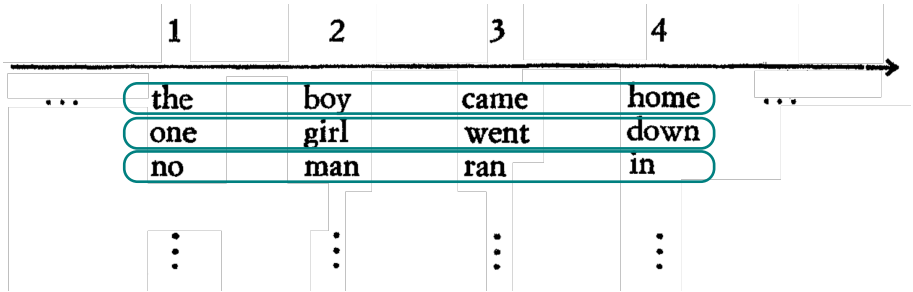
Le contenu linguistique est l'effet d'une **structure** virtuelle dérivée des pratiques linguistiques dans une communauté.

$$\bar{\mathbb{R}}^{C^{op}} \leftrightarrows (\bar{\mathbb{R}}^{D})^{op}$$

Structure

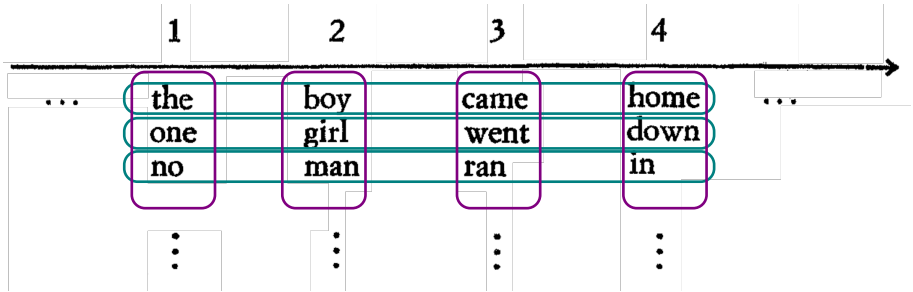


Syntagmes et paradigmes



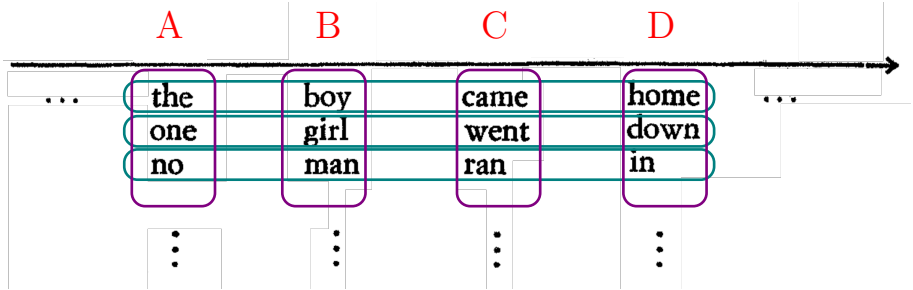
(Hjelmslev, 1971)

Syntagmes et paradigmes



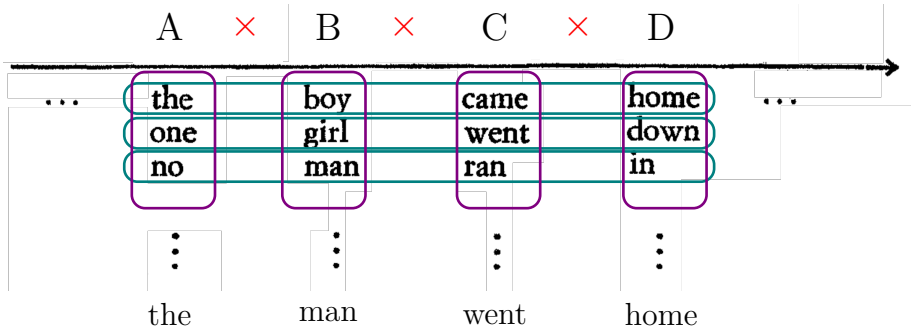
(Hjelmslev, 1971)

Syntagmes et paradigmes



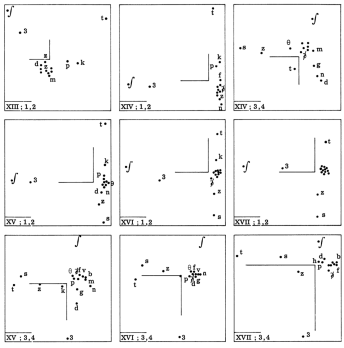
(Hjelmslev, 1971)

Syntagmes et paradigmes



(Hjelmslev, 1971)

Formalisme structuraliste



v. p.	1°	2°	3°	4°	5°
XII	,99	,98	,97	,92	,86
XV	,71	,41	,37	,37	,19

v. p.	1°	2°	3°	4°	5°
XIII	,94	,92	,86	,83	,75
XVI	,55	,29	,25	,19	,04

v. p.	1°	2°	3°	4°	5°
XIV	,87	,62	,49	,47	,45
XVII	,44	,23	,17	,09	,02

(benzécri1976codage)

1) une voyelle neutre (amorphe), caractérisée par l'absence de chacune des propriétés β, φ, χ, λ : $[\vartheta]$;

2) quatre types élémentaires de voyelles, chacun caractérisé par une seule propriété :

$$[\varepsilon] = \varphi\,,\ [\mathrm{a}] = \beta\,,\ [\mathrm{y}] = \chi\,,\ [\mathrm{o}] = \lambda$$

3) six voyelles distinctes, chacune caractérisée par deux propriétés :

$$[\mathrm{e}] = \varphi\beta\,,\ [\mathrm{i}] = \chi\varphi\,,\ [\mathrm{u}] = \chi\beta\,,\ [\mathrm{e}] = \lambda\varphi\,,\ [\mathrm{o}] = \lambda\beta\,,\ [\tilde{\mathrm{o}}] = \chi\lambda\,;$$

4) quatre voyelles combinées, chacune caractérisée par trois propriétés :

$$[\mathrm{e}] = \chi\lambda\varphi\,,\ [\mathrm{o}] = \chi\lambda\beta\,,\ [\tilde{\mathrm{a}}] = \varphi\beta\chi\,,\ [\tilde{\mathrm{o}}] = \varphi\beta\lambda\,;$$

5) une voyelle polymorphe, caractérisée par les quatre propriétés considérées : la voyelle russe $[\mathrm{ы}] = \varphi\beta\chi\lambda$.

On obtient alors le diagramme de la figure 2.

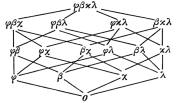
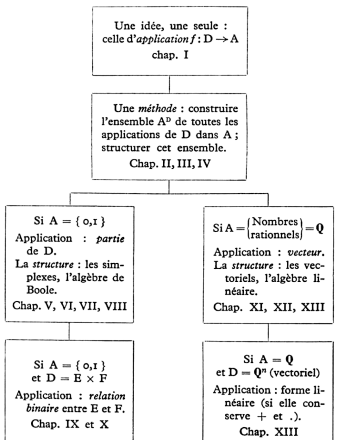


Fig. 2.

(Marcus, 1967)

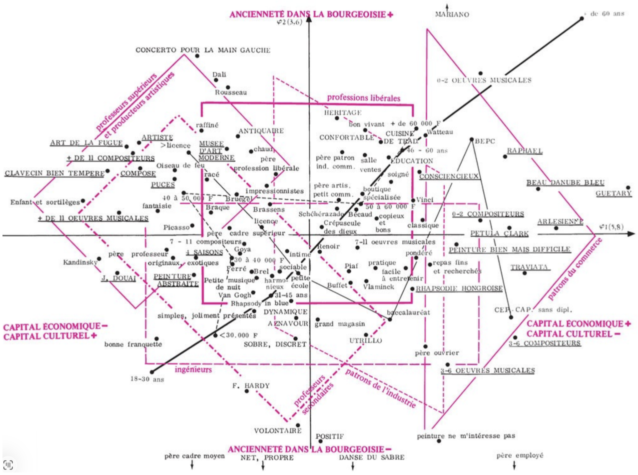
Organigramme



(Barbut1967_T1)

Sciences sociales structuralistes

"S'il est vrai que [...] la classe dominante constitue un espace relativement autonome dont la structure est définie par la distribution entre ses membres des différentes espèces de capital, [...] on doit retrouver ces structures dans l'espace des styles de vie [...]. C'est ce que l'on a essayé d'établir en soumettant à l'analyse des correspondances l'ensemble des données recueillies."



(Bourdieu, 1979)

4.2

4

4 L'explicabilité formelle ouvre la voie vers une *interpretabilité théorique* des données

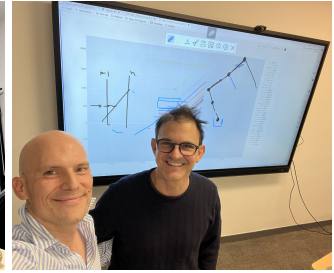
4.1 Les points fixes linéaires présentent des caractéristiques interprétables

4.2 Nous devons passer de l'hypothèse distributionnelle à l'*hypothèse structuraliste*

5

1 *Nous avons besoin d'un *formalisme critique*
2 *Un formalisme critique habilite une *critique épistémologique* de l'IA
3 *Cette critique épistémologique offre les fondéments d'une *explicabilité formelle* des LLMs
4 L'explicabilité formelle ouvre la voie vers une *interpretabilité théorique* des données
5 L'IA n'est rien d'autre que des *sciences humaines* déguisées

Collaborations



J. Terilla (CUNY), T.-D. Bradley (SandboxAQ), L. Pellissier (Paris-Est Créteil), Th. Seiller (CNRS), S. Jarvis (CUNY)

Articles de référence

- Gastaldi, J. L. (2021).Why Can Computers Understand Natural Language? *Philosophy & Technology*, *34*(1), 149–214. https://doi.org/10.1007/s13347-020-00393-9

- Gastaldi, J. L., & Pellissier, L. (2021b).The calculus of language: explicit representation of emergent linguistic structure through type-theoretical paradigms. *Interdisciplinary Science Reviews*, *46*(4), 569–590. https://doi.org/10.1080/03080188.2021.1890484

- Bradley, T.-D., Gastaldi, J. L., & Terilla, J. (2024).The structure of meaning in language: Parallel narratives in linear algebra and category theory. *Notices of the American Mathematical Society*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:263613625

Argument complet I

1 *Nous avons besoin d'un *formalisme critique*
1.1 *La critique de l'IA est à court de carburant
1.2 *Les limites de la critique dans la production du savoir tiennent à la place des savoirs formels
1.21 Les savoirs formels sont une construction récente
1.22 Ils ont été mobilisés pour fonder des epistémologies dogmatiques
1.23 La tradition critique a fait du formalisme une cible
1.3 *Une nouvelle alliance entre pensée critique et formalisme est nécessaire
1.31 Le formalisme n'est pas un naturalisme
1.32 Un formalisme critique est possible
2 *Un formalisme critique habilite une *critique épistémologique* de l'IA
2.1 *L'étude empirique des LLMs n'a pas de fondement épistémologique
2.11 L'informatique traverse un tournant empirique autour des LLMs
2.12 Mais les LLMs ne sont que des fonctions calculables

Argument complet II

2.13 Il n'existe pas de moyen empirique de savoir ce qu'une fonction calculable fait

2.14 *La seule question épistémologique valide est: de quoi cette fonction est-elle l'implémentation?

2.2 *Les LLMs n'ont aucune portée cognitive a priori

2.21 La portée cognitive des modèles de langage computationnels n'est pas inconditionnelle

2.22 La condition épistémologique assurant un tel lien ne s'applique pas aux LLMs

2.23 L'absence de portée cognitive n'empêche pas les LLMs d'être des modèles du langage

3 *Cette critique épistémologique offre les fondéments d'une *explicabilité formelle* des LLMs

3.1 *La clé formelle des LLMs réside dans les *embeddings*

3.2 *SVD d'une matrice PMI fournit l'explication formelle des embeddings

Argument complet III

3.3 *Ce résultat a d'importantes conséquences pour l'explicabilité

3.4 *Il est possible de généraliser ce résultat

3.41 *De l'algèbre linéaire à la *théorie des catégories*

3.411 *Une catégorie est comme un ensemble muni d'une structure

3.412 Un foncteur est une application entre catégories

3.413 Un profoncteur est un foncteur du produit de deux catégories quelconques vers la catégorie Set

3.414 Une catégorie enrichie sur $\mathcal{V}$ est une catégorie dont les flèches entre deux objets sont des valeurs dans $\mathcal{V}$

3.415 Un foncteur entre les catégories enrichies $\mathsf{D} \to \mathsf{C}$ induit un profoncteur $\mathsf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{D} \to \mathcal{V}$

3.42 *Il existe un parallèle profond entre des opérateurs linéaires et catégoriques

3.5 *Cette généralisation permet de révéler beaucoup plus de structure

Argument complet IV

3.51 *Enrichissement sur $\mathbf{2}$: Concepts formels

3.52 Enrichissement sur $\bar{\mathbb{R}}$

3.6 Le noyau du profoncteur pourrait permettre d'étudier la tokenisation, les embeddings et l'attention de manière formellement unifiée

4 L'explicabilité formelle ouvre la voie vers une *interpretabilité théorique* des données

4.1 Les points fixes linéaires présentent des caractéristiques interprétables

4.2 Nous devons passer de l'hypothèse distributionnelle à l'*hypothèse structuraliste*

5 L'IA n'est rien d'autre que des *sciences humaines* déguisées

Technologies de l'esprit. Machines à co-habiter
LLCP - Université Paris 8 | La Générale
Paris, France

Ce que les mathématiques peuvent apporter à la critique des LLMs

Éléments pour un formalisme critique

Juan Luis Gastaldi

www.giannigastaldi.com

ETH zürich

11 mai, 2026

Thèses

1. *Nous avons besoin d'un *formalisme critique*
2. *Un formalisme critique habilite une *critique épistémologique* de l'IA
3. *Cette critique épistémologique offre les fondéments d'une *explicabilité formelle* des LLMs
4. L'explicabilité formelle ouvre la voie vers une *interpretabilité théorique* des données
5. L'IA n'est rien d'autre que des *sciences humaines* déguisées