Frege dans l'Histoire des Sciences
UMR STL, Université de Lille
Lille, France

Frege mathématicien

De l'iteration fonctionnelle aux fondements de l'arithmétique dans l'*Habilitationsschrift* de 1874

Juan Luis Gastaldi

ETH zürich

14 juin, 2024

Plan

Contexte

Perspective Philosophique

Construction Conceptuelle

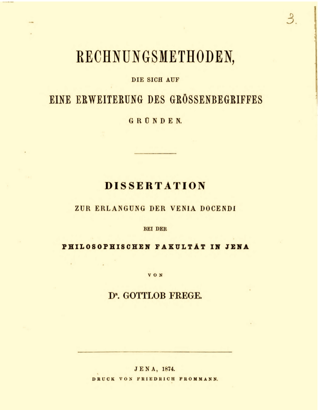
Specification Mathématique

Conclusion

Plan

L'*Habilitationsschrift* de 1874

- 'Rechnungsmethoden die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen" (Frege, 1874a, 1874b)



3.

RECHNUNGSMETHODEN,

DIE SICH AUF

EINE ERWEITERUNG DES GRÖSSENBEGRIFFES

GRÜNDEN.

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT IN JENA

VON

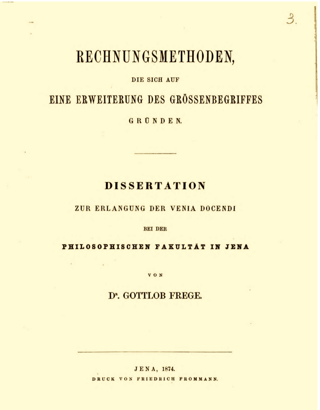
Dr. GOTTLOB FREGE.

JENA, 1874.

DRUCK VON FRIEDRICH FROMMANN.

L'*Habilitationsschrift* de 1874

- 'Rechnungsmethoden die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen" (Frege, 1874a, 1874b)
- Thèse pour obtenir la qualification de Privatdozent à l'université d'Iéna



3.

RECHNUNGSMETHODEN,

DIE SICH AUF

EINE ERWEITERUNG DES GRÖSSENBEGRIFFES

GRÜNDEN.

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT IN JENA

VON

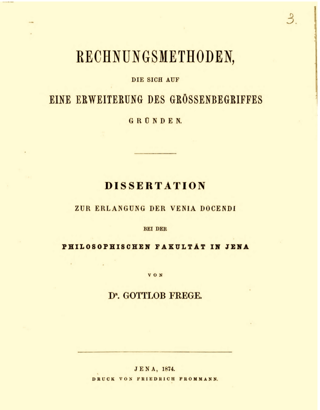
Dr. GOTTLOB FREGE.

JENA, 1874.

DRUCK VON FRIEDRICH FROMMANN.

L'*Habilitationsschrift* de 1874

- 'Rechnungsmethoden die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen" (Frege, 1874a, 1874b)
- Thèse pour obtenir la qualification de Privatdozent à l'université d'Iéna
- Thèse doctoral (1873): "Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene"



3.

RECHNUNGSMETHODEN,

DIE SICH AUF

EINE ERWEITERUNG DES GRÖSSENBEGRIFFES

GRÜNDEN.

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT IN JENA

VON

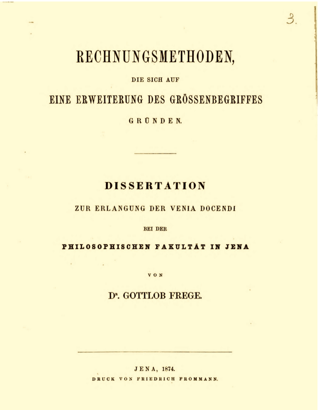
Dr. GOTTLOB FREGE.

JENA, 1874.

DRUCK VON FRIEDRICH FROMMANN.

L’*Habilitationsschrift* de 1874

- ‘Rechnungsmethoden die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen” (Frege, 1874a, 1874b)
- Thèse pour obtenir la qualification de Privatdozent à l’université d’Iéna
- Thèse doctoral (1873): “Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene”
- Litérature secondaire: Wilson (1992),Gronau (1997, 2000), Gastaldi (2016).



3.

RECHNUNGSMETHODEN,

DIE SICH AUF

EINE ERWEITERUNG DES GRÖSSENBEGRIFFES

GRÜNDEN.

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT IN JENA

VON

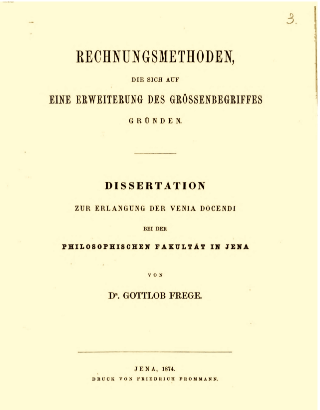
Dr. GOTTLOB FREGE.

JENA, 1874.

DRUCK VON FRIEDRICH FROMMANN.

L'*Habilitationsschrift* de 1874

- 'Rechnungsmethoden die sich auf eine Erweiterung des Grössenbegriffes gründen" (Frege, 1874a, 1874b)
- Thèse pour obtenir la qualification de Privatdozent à l'université d'Iéna
- Thèse doctoral (1873): "Über eine geometrische Darstellung der imaginären Gebilde in der Ebene"
- Litérature secondaire: Wilson (1992),Gronau (1997, 2000), Gastaldi (2016).
- Le but est de proposer un fondement non intuitif des grandeurs ou des quantités numériques (Größe).



3.

RECHNUNGSMETHODEN,

DIE SICH AUF

EINE ERWEITERUNG DES GRÖSSENBEGRIFFES

GRÜNDEN.

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT IN JENA

VON

Dr. GOTTLOB FREGE.

JENA, 1874.

DRUCK VON FRIEDRICH FROMMANN.

L'Echec du Programme de Lagrange

- Échec du programme de Lagrange vers la fin du 18e siècle (Ferraro & Panza, 2012)
  - Algébrisation de l'Analyse
  - Notion de fonction à la fois comme expression de calcul et comme quantité
  - Le programme de Lagrange est un expressionnisme: contenu (quantités) à même les expressions, et non pas comme la référence de symboles
  - Échec dû aux présupposés d'ordre, mesure et continuité

L'Echec du Programme de Lagrange

- Échec du programme de Lagrange vers la fin du 18e siècle (Ferraro & Panza, 2012)
  - Algébrisation de l'Analyse
  - Notion de fonction à la fois comme expression de calcul et comme quantité
  - Le programme de Lagrange est un expressionnisme: contenu (quantités) à même les expressions, et non pas comme la référence de symboles
  - Échec dû aux présupposés d'ordre, mesure et continuité

- Cet échec détermine l'évolution des maths européennes à travers le 19e siècle
  - Algèbre anglaise: choix des **expressions de calcul**, calcul symbolique, logique abstraite, algèbre abstraite, symbolisme

L'Echec du Programme de Lagrange

- Échec du programme de Lagrange vers la fin du 18e siècle (Ferraro & Panza, 2012)
  - Algébrisation de l'Analyse
  - Notion de fonction à la fois comme expression de calcul et comme quantité
  - Le programme de Lagrange est un expressionnisme: contenu (quantités) à même les expressions, et non pas comme la référence de symboles
  - Échec dû aux présupposés d'ordre, mesure et continuité

- Cet échec détermine l'évolution des maths européennes à travers le 19e siècle
  - Algèbre anglaise: choix des expressions de calcul, calcul symbolique, logique abstraite, algèbre abstraite, symbolisme
  - Analyse continental: choix des quantités, théorie des grandeurs, arithméthisation, théorie des ensembles, réalisme

Les Mathématiques en 1874

- Aucune véritable trace de logicisme

Les Mathématiques en 1874

- Aucune véritable trace de logicisme
- Théorie pure des grandeurs (reine Grössenlehre) (Gauss)
  - Pas d'arithmétisation à la "voie berlinoise":

Les Mathématiques en 1874

- Aucune véritable trace de logicisme
- Théorie pure des grandeurs (reine Grössenlehre) (Gauss)
  - Pas d'arithmétisation à la "voie berlinoise":
- Autres théories et méthodes mathématiques pertinentes:
  - La théorie des fonctions complexes et, plus particulièrement, des *équations fonctionnelles*, (Cauchy, 1821)
  - Le calclul symbolique des opérations algébriques, en Angleterre (Woodhouse, Peacock, Gergory, Boole, Jevons, Hankel) et Allemagne (R. Grassmann, 1872; Hankel, 1867; Schröder, 1873).
  - Des définitions récursives des opérations arithmétiques, (H. Grassmann, 1861; Schröder, 1873).

Schröder et la Théorie de l'Itération (1870)

"Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen"

- $f(z)$, où z est complexe de la forme $z = x + iy$

Schröder et la Théorie de l'Itération (1870)

"Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen"

- $f(z)$, où z est complexe de la forme $z = x + iy$
- $f(z_1) = 0$ (i.e., z_1 est une racine de f)

Schröder et la Théorie de l'Itération (1870)

"Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen"

- $f(z)$, où z est complexe de la forme $z = x + iy$
- $f(z_1) = 0$ (i.e., z_1 est une racine de f)
- Il s'agit de trouver $F(z)$ renvoyant toujours une valeur z' plus proche de la racine z_1 que tout argument z initialement pris dans un voisinage de z_1 .

Schröder et la Théorie de l'Itération (1870)

"Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen"

- $f(z)$, où z est complexe de la forme $z = x + iy$
- $f(z_1) = 0$ (i.e., z_1 est une racine de f)
- Il s'agit de trouver $F(z)$ renvoyant toujours une valeur z' plus proche de la racine z_1 que tout argument z initialement pris dans un voisinage de z_1 .

$$z' = F(z) \qquad z^{(r)} = F(z^{(r-1)}) \qquad \lim_{r=\infty} = z_1$$

Schröder et la Théorie de l'Itération (1870)

"Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen"

La résolution de l'équation $f(z) = 0$ *peut alors être représentée symboliquement comme suit :*

$$z_1 = \lim_{r=\infty} F^r(z) \, ,$$

si nous désignons […] la fonction r*-fois répétée ou itérée:*

$$\underset{\overset{\frown}{1}}{F}(\underset{\overset{\frown}{2}}{F}\{\ldots \underset{\overset{\frown}{r-1}}{F}\,[\underset{\overset{\frown}{r}}{F}(z)]\ldots\}) = F^r(z)$$

(Schröder, 1870, p. 320)

Schröder et la Théorie de l'Itération (1871)

"Ueber iterirte Functionen"

$$F^1(z) = F(z), \qquad F^r(z) = F^{(r-1)}\{F(z)\}$$

Schröder et la Théorie de l'Itération (1871)

"Ueber iterirte Functionen"

$$F^1(z) = F(z), \qquad F^r(z) = F^{(r-1)}\{F(z)\}$$

$$F^2(z) = FF(z) \qquad F^3 = FFF(z)$$

Schröder et la Théorie de l'Itération (1871)

“Ueber iterirte Functionen”

$$F^1(z) = F(z), \qquad F^r(z) = F^{(r-1)}\{F(z)\}$$

$$F^2(z) = FF(z) \qquad F^3 = FFF(z)$$

Comme le résultat final doit malgré tout dépendre en général de r, on ne peut y parvenir qu'en représentant la grandeur $(z)^r$ de telle sorte que r n'entre dans son expression que comme un nombre général, qu'il soit donc transformé d'un indice en un argument et que $(z)^r$ soit explicité comme une fonction analytique de r.

(Schröder, 1870, p. 297)

Schröder et la Théorie de l'Itération (1871)

"Ueber iterirte Functionen"

$$F^1(z) = F(z), \qquad F^r(z) = F^{(r-1)}\{F(z)\}$$

$$F^2(z) = FF(z) \qquad F^3 = FFF(z)$$

Comme le résultat final doit malgré tout dépendre en général de r, on ne peut y parvenir qu'en représentant la grandeur $(z)^r$ de telle sorte que r n'entre dans son expression que comme un nombre général, qu'il soit donc transformé d'un indice en un argument et que $(z)^r$ soit explicité comme une fonction analytique de r.

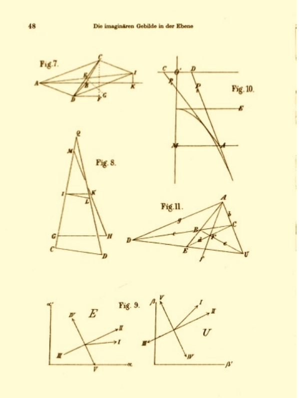
(Schröder, 1870, p. 297)

$$\Phi(r, z) = \Phi(r-1, F(z)) \qquad \Phi(1, z) = F(z)$$

Plan

Grandeurs et Intuition

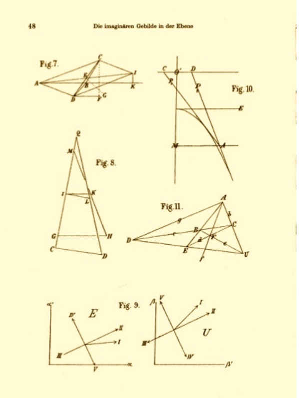
- Difficultés soulevées par les nombres complexes au regard du concept classique de grandeur ou de quantité tel que déterminé par la géométrie euclidienne.
  - Même sous leur représentation géométrique (Frege, 1873)



(Frege, 1873)

Grandeurs et Intuition

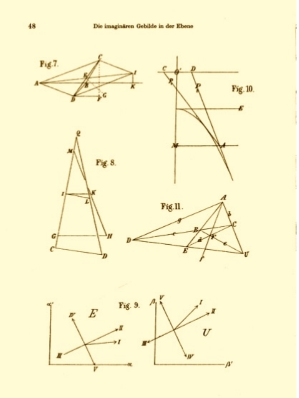
- Difficultés soulevées par les nombres complexes au regard du concept classique de grandeur ou de quantité tel que déterminé par la géométrie euclidienne.
  - Même sous leur représentation géométrique (Frege, 1873)
- En 1874, Frege rejette toute dimension intuitive essentielle des nombres complexes.



(Frege, 1873)

Grandeurs et Intuition

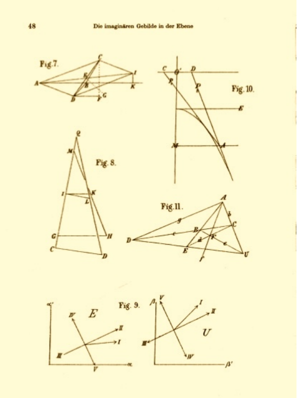
- Difficultés soulevées par les nombres complexes au regard du concept classique de grandeur ou de quantité tel que déterminé par la géométrie euclidienne.
  - Même sous leur représentation géométrique (Frege, 1873)
- En 1874, Frege rejette toute dimension intuitive essentielle des nombres complexes.
- Les nombres complexes ne sont pas moins “quantitatifs” pour autant.
  - Ils révèlent que l’intuition du quantitatif a toujours été illusoire.
  - *Les droites bornées et les plans délimités par des courbes peuvent certes être intuitifs, mais ce qui est quantitatif en eux, ce qui est commun aux longueurs et aux surfaces, échappe à notre intuition.* (Frege, 1874a, p. 56)



(Frege, 1873)

Grandeurs et Intuition

- Difficultés soulevées par les nombres complexes au regard du concept classique de grandeur ou de quantité tel que déterminé par la géométrie euclidienne.
  - Même sous leur représentation géométrique (Frege, 1873)
- En 1874, Frege rejette toute dimension intuitive essentielle des nombres complexes.
- Les nombres complexes ne sont pas moins “quantitatifs” pour autant.
  - Ils révèlent que l’intuition du quantitatif a toujours été illusoire.
  - *Les droites bornées et les plans délimités par des courbes peuvent certes être intuitifs, mais ce qui est quantitatif en eux, ce qui est commun aux longueurs et aux surfaces, échappe à notre intuition.* (Frege, 1874a, p. 56)
- Il en découle une distinction fondamentale entre géométrie et arithmétique



(Frege, 1873)

Problème principal: proposer un concept de quantité englobant la totalité des propositions de l'arithmétique, et suffisamment large pour permettre le plus grand nombre d'applications possibles.

Plan

Addition, Opérations, Fonctions

- Toutes les propositions arithmétiques se réfèrent d'une manière ou d'une autre à l'addition
  - Gauss, H. Grassmann, Schröder, Frege (1873)
  - "Dans les termes les plus généraux, le processus de l'addition est le suivant : nous remplaçons un groupe de choses par une seule de la même espèce." (Frege, 1874a, p. 57)
  - L'addition est le principe même de l'opératoire

Addition, Opérations, Fonctions

- Toutes les propositions arithmétiques se réfèrent d'une manière ou d'une autre à l'addition
  - Gauss, H. Grassmann, Schröder, Frege (1873)
  - "Dans les termes les plus généraux, le processus de l'addition est le suivant : nous remplaçons un groupe de choses par une seule de la même espèce." (Frege, 1874a, p. 57)
  - L'addition est le principe même de l'opératoire
- L'accent est alors mis sur les opérations
  - "*Si nous répétons une opération f en lui soumettant constamment son résultat, nous pouvons considérer les applications répétées de l'opération f comme de nouvelles opérations*" (Frege, 1874a, p. 58)

Addition, Opérations, Fonctions

- Toutes les propositions arithmétiques se réfèrent d'une manière ou d'une autre à l'addition
  - Gauss, H. Grassmann, Schröder, Frege (1873)
  - "Dans les termes les plus généraux, le processus de l'addition est le suivant : nous remplaçons un groupe de choses par une seule de la même espèce." (Frege, 1874a, p. 57)
  - L'addition est le principe même de l'opératoire
- L'accent est alors mis sur les opérations
  - "*Si nous répétons une opération f en lui soumettant constamment son résultat, nous pouvons considérer les applications répétées de l'opération f comme de nouvelles opérations*" (Frege, 1874a, p. 58)
- "*Cela devrait nous permettre de reconnaître les parties de l'arithmétique qui seraient couvertes par une théorie du concept de quantité en relation avec les fonctions*". (Frege, 1874a, p. 58)
  - Les fonctions sont traitées comme des *expressions* canoniques des opérations

Plan

La Quantité d'une Fonction

"Après ce qui a été dit ci-dessus, on comprendra que l'on attribue aux fonctions $\varphi(\varphi(x))$*,* $\varphi(\varphi(\varphi(x)))$ *le double ou le triple de la quantité de la fonction* $\varphi(x)$*. Il n'est pas moins clair que la fonction* $\psi(x)$ *doit se voir attribuer un quart de la quantité de* $\varphi(x)$ *lorsque* $\varphi(x)$ *est identique à* $\psi(\psi(\psi(\psi(x))))$*, que la quantité* $\chi(x)$ *est la réciproque de la quantité de* $\varphi(x)$ *lorsque* $\varphi\chi(x) = x$*, et finalement, que lorsque* x *est une fonction d'elle-même, la quantité de la fonction doit être désignée comme la quantité nulle."*

(Frege, 1874a, p. 59)

Exemple

$$2 \cdot 5 \qquad 4 \cdot 5 \qquad 8 \cdot 5$$

Exemple

$$2 \cdot 5 \qquad 4 \cdot 5 \qquad 8 \cdot 5$$

$$2 \circ 5 \qquad 4 \circ 5 \qquad 8 \circ 5$$

$$a \circ x$$

Exemple

$$2 \cdot 5 \qquad 4 \cdot 5 \qquad 8 \cdot 5$$

$$\cancel{2 \circ 5 \qquad 4 \circ 5 \qquad 8 \circ 5}$$

$$\cancel{a \circ x}$$

$$\varphi(x) = 2 \cdot x \qquad \psi(x) = 4 \cdot x \qquad \chi(x) = 8 \cdot x$$

Exemple

$$2 \cdot 5 \qquad 4 \cdot 5 \qquad 8 \cdot 5$$

$$\cancel{2 \circ 5 \qquad 4 \circ 5 \qquad 8 \circ 5}$$

$$\cancel{a \circ x}$$

$$\varphi(x) = 2 \cdot x \qquad \psi(x) = 4 \cdot x \qquad \chi(x) = 8 \cdot x$$

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \\ &= \\ &= \varphi(\varphi(\varphi(x))) \end{aligned}$$

Exemple

$$2 \cdot 5 \qquad 4 \cdot 5 \qquad 8 \cdot 5$$

$$\cancel{2 \circ 5 \qquad 4 \circ 5 \qquad 8 \circ 5}$$

$$\cancel{a \circ x}$$

$$\varphi(x) = 2 \cdot x \qquad \psi(x) = 4 \cdot x \qquad \chi(x) = 8 \cdot x$$

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 8 \cdot x \\ &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot x)) \\ &= \varphi(\varphi(\varphi(x))) \end{aligned}$$

Image géométrique

On peut se représenter la chose par l'image géométrique suivante. Soit $y = f(x)$ représentant une courbe en coordonnées rectangulaires. Si nous commençons par donner à la fonction f la quantité 0, nous avons en $y = x$ la droite qui divise par deux l'angle droit de la coordonnée. Par souci de concision, on peut l'appeler ligne zéro. Si nous laissons la quantité de $f(x)$ augmenter progressivement, la courbe qui en résulte devient d'abord presque imperceptible, puis de plus en plus bombée et déviée de la ligne zéro. Si nous faisons ensuite passer la grandeur de la fonction par des valeurs égales et opposées en partant de zéro, nous obtenons des images qui sont dans l'ordre des précédentes et qui sont symétriques par rapport à la ligne zéro.

(Frege, 1874a, p. 59)

Image géométrique

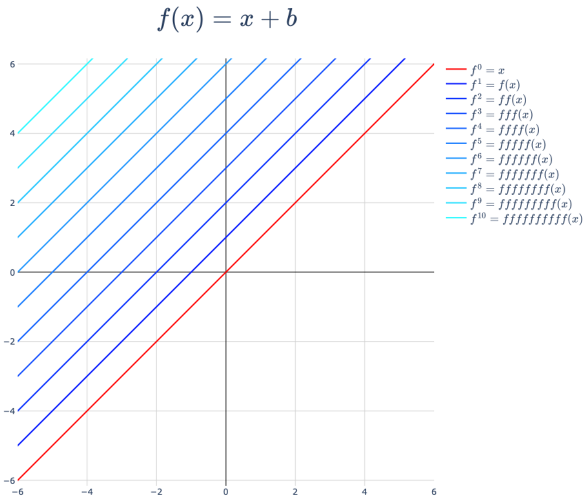


Image géométrique

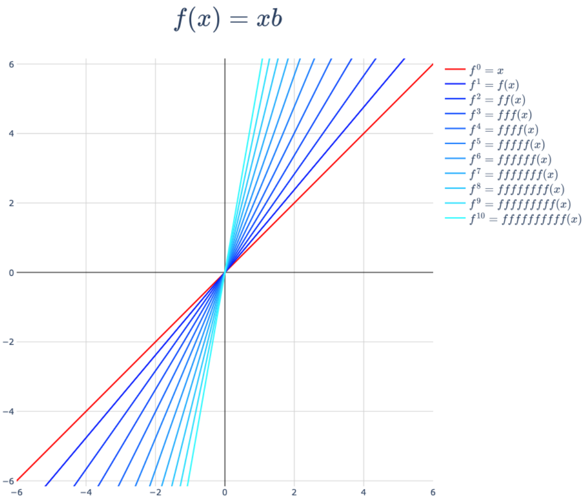
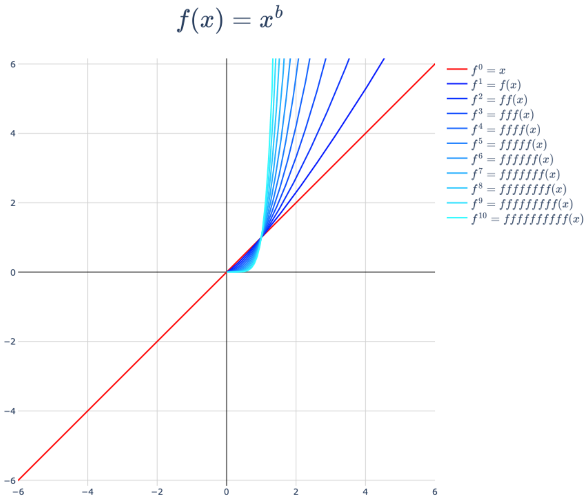


Image géométrique



Deux Questions

Quelle est la fonction dont la quantité est dans un rapport donné avec la quantité d'une fonction donnée ?

Les quantités de deux fonctions données appartiennent-elles au même domaine quantitatif, et dans quel rapport se trouvent-elles alors ?

(Frege, 1874a, p. 59-60)

Équation Fonctionnelle Quantitative

$$f(x) \longrightarrow f(n, x)$$
$$\varphi(x) = 2 \cdot x \longrightarrow \varphi(n, x) = 2^n \cdot x$$

La réponse à ces questions est liée à la connaissance de la forme générale d'une fonction qui est n fois plus grande qu'une fonction donnée. En d'autres termes, il faut avoir une fonction de n et x qui, pour $n = 1$, se transforme en la fonction donnée de x, et dont l'équation fonctionnelle générale est la suivante

$$f(n_0, f(n_1, x)) = f(n_0 + n_1, x)$$

(Frege, 1874a, p. 60)

Des Indices aux Quantités

Schröder (1871) $\Phi(r,z) = \Phi(r-1, F(z))$ $\Phi(1,z) = F(z)$

Frege (1873) $f(n_0, f(n_1, x)) = f(n_0 + n_1, x)$

Des Indices aux Quantités

Gregory (1838)	$f_m(a).f_n(a) = f_{m+n}(a)$
Boole (1849/50)	$x^m x^n = x^{m+n}$
Schröder (1871)	$\Phi(r, z) = \Phi(r-1, F(z)) \qquad \Phi(1, z) = F(z)$
Frege (1873)	$f(n_0, f(n_1, x)) = f(n_0 + n_1, x)$

Des Indices aux Quantités

Gregory (1838)	$f_m(a).f_n(a) = f_{m+n}(a)$
Boole (1849/50)	$\cancel{x^m x^n = x^{m+n}}$ $\quad x^n = x$
Schröder (1871)	$\Phi(r, z) = \Phi(r-1, F(z))$ $\quad \Phi(1, z) = F(z)$
Frege (1873)	$f(n_0, f(n_1, x)) = f(n_0 + n_1, x)$

Schémas de Recursion

Frege 1874	$\varphi(1, x) = \psi(x)$	$\varphi(k+1, x) = \varphi(k, \varphi(1, x))$
Dedekind 1888	$\varphi(1) = \omega$	$\varphi(k') = \mu(\varphi(k))$
Gödel 1931	$\varphi(0, \vec{x}) = \psi(\vec{x})$	$\varphi(k+1, \vec{x}) = \mu(k, \varphi(k, \vec{x}), \vec{x})$

Équations quantitatives

$$f(n_0, f(n_1, x)) = f(n_0 + n_1, x)$$

$$n = \psi(X, x)$$

Équations quantitatives

$$f(n_0, f(n_1, x)) = f(n_0 + n_1, x)$$

$$n = \psi(X, x)$$

$$n_0 = \psi(X, x_0)$$

$$n_1 = \psi(x_0, x_1)$$

Équations quantitatives

$$f(n_0, f(n_1, x)) = f(n_0 + n_1, x)$$

$$n = \psi(X, x)$$

$$n_0 = \psi(X, x_0)$$

$$n_1 = \psi(x_0, x_1)$$

$$n_0 + n_1 = \psi(X, x_1)$$

$$\psi(X, x_0) + \psi(x_0, x_1) = \psi(X, x_1)$$

Méthode de Substitution

$$\psi(X, x_0) + \psi(x_0, x_1) = \psi(X, x_1) \tag{1}$$

- Si $\psi(X, x)$ est une équation quantitative, alors $\psi(\vartheta(X), \vartheta(x))$ l'est aussi.

Méthode de Substitution

$$\psi(X, x_0) + \psi(x_0, x_1) = \psi(X, x_1) \tag{1}$$

- Si $\psi(X, x)$ est une équation quantitative, alors $\psi(\vartheta(X), \vartheta(x))$ l'est aussi.
- $\psi(X, x) = X - x$ (correspondant à la fonction d'addition, i.e., $X = x + b$) est une solution générale de l'eq. (1).
  - $X - x_0 + x_0 - x_1 = X - x_1$

Méthode de Substitution

$$\psi(X, x_0) + \psi(x_0, x_1) = \psi(X, x_1) \qquad (1)$$

- Si $\psi(X, x)$ est une équation quantitative, alors $\psi(\vartheta(X), \vartheta(x))$ l'est aussi.
- $\psi(X, x) = X - x$ (correspondant à la fonction d'addition, i.e., $X = x + b$) est une solution générale de l'eq. (1).
  - $X - x_0 + x_0 - x_1 = X - x_1$
- $X - x$ est l'équation quantitative "la plus simple" (Frege, 1874a, p. 62).

Méthode de Substitution

$$\psi(X, x_0) + \psi(x_0, x_1) = \psi(X, x_1) \tag{1}$$

- Si $\psi(X, x)$ est une équation quantitative, alors $\psi(\vartheta(X), \vartheta(x))$ l'est aussi.
- $\psi(X, x) = X - x$ (correspondant à la fonction d'addition, i.e., $X = x + b$) est une solution générale de l'eq. (1).
  - $X - x_0 + x_0 - x_1 = X - x_1$
- $X - x$ est l'équation quantitative "la plus simple" (Frege, 1874a, p. 62).
- Toute équation quantitative peut être trouvée par substitution à partir de $X - x$ (Frege, 1874a, p. 61-62)

Méthode de Substitution: Exemples

From Addition to Multiplication

$$\psi(X, x) = X - x$$

Méthode de Substitution: Exemples

From Addition to Multiplication

$$\psi(X, x) = X - x$$

$$\vartheta(x) = \frac{\log x}{\log b}$$

Méthode de Substitution: Exemples

From Addition to Multiplication

$$\psi(X, x) = X - x$$

$$\vartheta(x) = \frac{\log x}{\log b}$$

$$n = \psi(\vartheta(X), \vartheta(x)) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

Méthode de Substitution: Exemples

From Addition to Multiplication

$$\psi(X, x) = X - x$$

$$\vartheta(x) = \frac{\log x}{\log b}$$

$$n = \psi(\vartheta(X), \vartheta(x)) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

$$X = b^n x$$

Méthode de Substitution: Exemples

From Addition to Multiplication

$$\psi(X, x) = X - x$$

$$\vartheta(x) = \frac{\log x}{\log b}$$

$$n = \psi(\vartheta(X), \vartheta(x)) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

$$X = b^n x$$

From Multiplication to Linear

$$\psi(X, x) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

Méthode de Substitution: Exemples

From Addition to Multiplication

$$\psi(X, x) = X - x$$

$$\vartheta(x) = \frac{\log x}{\log b}$$

$$n = \psi(\vartheta(X), \vartheta(x)) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

$$X = b^n x$$

From Multiplication to Linear

$$\psi(X, x) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

$$\vartheta(x) = x - a$$

Méthode de Substitution: Exemples

From Addition to Multiplication

$$\psi(X, x) = X - x$$

$$\vartheta(x) = \frac{\log x}{\log b}$$

$$n = \psi(\vartheta(X), \vartheta(x)) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

$$X = b^n x$$

From Multiplication to Linear

$$\psi(X, x) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

$$\vartheta(x) = x - a$$

$$n = \psi(\vartheta(X), \vartheta(x)) = \frac{\log(X - a) - \log(x - a)}{\log b}$$

Méthode de Substitution: Exemples

From Addition to Multiplication

$$\psi(X, x) = X - x$$

$$\vartheta(x) = \frac{\log x}{\log b}$$

$$n = \psi(\vartheta(X), \vartheta(x)) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

$$X = b^n x$$

From Multiplication to Linear

$$\psi(X, x) = \frac{\log X - \log x}{\log b}$$

$$\vartheta(x) = x - a$$

$$n = \psi(\vartheta(X), \vartheta(x)) = \frac{\log(X - a) - \log(x - a)}{\log b}$$

$$X = a(1 - b^n) + b^n x$$

Méthode d'Integration

On pose $X_\delta = x + \delta\varphi(x)$ avec δ infiniment petit

Pour $X_n = f(n, x)$ lorsque $n = \delta$, et étant donné que $f(0, x) = x$, on obtient la forme:

$$X_\delta = x + \delta \left(\frac{\partial f(n, x)}{\partial n} \right)_{n=0}$$

On peut définir une fonction φ tel que:

$$\varphi(f(n, x)) = \frac{\partial f(n, x)}{\partial n}$$

Pour x constant et résolvant pour $\mathrm{d}n$ pour retrouver n par intégration:

$$n = \int \frac{\mathrm{d}X}{\varphi(X)} + C$$

Cette expression peut être vue comme une fonction ϑ dans la méthode de substitution, notamment $\vartheta(X) + C$, et la constante C se voit déterminée par le fait que n est 0 quand $X = x$. On peut alors obtenir:

$$n = \vartheta(X) - \vartheta(x)$$

Plan

Conclusions

L'*Habilitationsschrift* de Frege:

- Définit le programme d'un fondement non intuitif et purement conceptuel pour l'arithmétique.
- Propose une approche fonctionnelle des concepts mathématiques.
  - Dimension opérationnelle (calculatoire)
  - Dimension fonctionnelle (expressive)
  - Dimension quantitative (conceptuelle, logique, de contenu)
- Propose une solution au contenu numérique des indices.
- Propose un schéma de récursion.
- Constitue la source d'un expressionnisme dans les sciences formelles.
  - En alternative au symbolisme et au réalisme.
- Communique avec des enjeux contemporains de l'expressionnisme formel.

Articles de Référence

- Frege, G. (1874b). *Rechnungsmethoden, die sich auf eine erweiterung des grössenbegriffes gründen: Dissertation zur erlangung der venia docendi bei der philosophischen fakultät in jena*. Druck v. Friedrich Frommann

- Frege, G. (1874a). Methods of calculation based on an extension of the concept of quantity. In *Collected papers on mathematics, logic, and philosophy* (pp. 56–92). Basil-Blackwell

- Gastaldi, J. L. (2016). Frege's *Habilitationsschrift*: Magnitude, Number and the Problems of Computability. In F. Gadducci & M. Tavosanis (Eds.), *History and philosophy of computing* (pp. 168–185). Springer International Publishing

References I

Ferraro, G., & Panza, M. (2012).Lagrange's theory of analytical functions and his ideal of purity of method. *Archive for History of Exact Sciences*, *66*(2), 95–197.

Frege, G. (1873). On a geometrical representation of imaginary forms in the plane. In *Collected papers on mathematics, logic, and philosophy* (pp. 1–55). Basil-Blackwell.

Frege, G. (1874a). Methods of calculation based on an extension of the concept of quantity. In *Collected papers on mathematics, logic, and philosophy* (pp. 56–92). Basil-Blackwell.

Frege, G. (1874b). *Rechnungsmethoden, die sich auf eine erweiterung des grössenbegriffes gründen: Dissertation zur erlangung der venia docendi bei der philosophischen fakultät in jena*. Druck v. Friedrich Frommann.

Gastaldi, J. L. (2016). Frege's *Habilitationsschrift*: Magnitude, Number and the Problems of Computability. In F. Gadducci & M. Tavosanis (Eds.), *History and philosophy of computing* (pp. 168–185). Springer International Publishing.

Grassmann, H. (1861). *Lehrbuch der arithmetik für höhere lehranstalten*. Th. Chr. Fr. Enslin.

Grassmann, R. (1872). *Die formenlehre oder mathematik*. R. Grassmann.

Gronau, D. (1997). Gottlob Frege, a pioneer in iteration theory. In L. Reich, J. Smítal, & G. Targonski (Eds.), *Proceedings of the european conference on iteration theory, ecit94. grazer math. ber.* (pp. 105–119).

Gronau, D. (2000). Gottlob Freges Beiträge zur Iterationstheorie und zur Theorie der Funktionalgleichungen. In G. Gabriel & U. Dathe (Eds.), *Gottlob frege–werk und wirkung*. Mentis.

Hankel, H. (1867). *Theorie der complexen Zahlensysteme*. L. Voss.

Schröder, E. (1870).Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Mathematische Annalen*, *2*(2), 317–365. https://doi.org/10.1007/BF01444024

Schröder, E. (1871).Ueber iterirte Functionen. *Mathematische Annalen*, *3*, 296–322.

Schröder, E. (1873). *Lehrbuch der arithmetik und algebra fur lehrer und studirende*. B. G. Teubner.

References II

Wilson, M. (1992).Frege: The royal road from geometry. *Noûs*, *26*(2), 149–180.

Frege dans l’Histoire des Sciences
UMR STL, Université de Lille
Lille, France

Frege mathématicien

De l’iteration fonctionnelle aux fondements de l’arithmétique dans l’*Habilitationsschrift* de 1874

Juan Luis Gastaldi

ETH zürich

14 juin, 2024